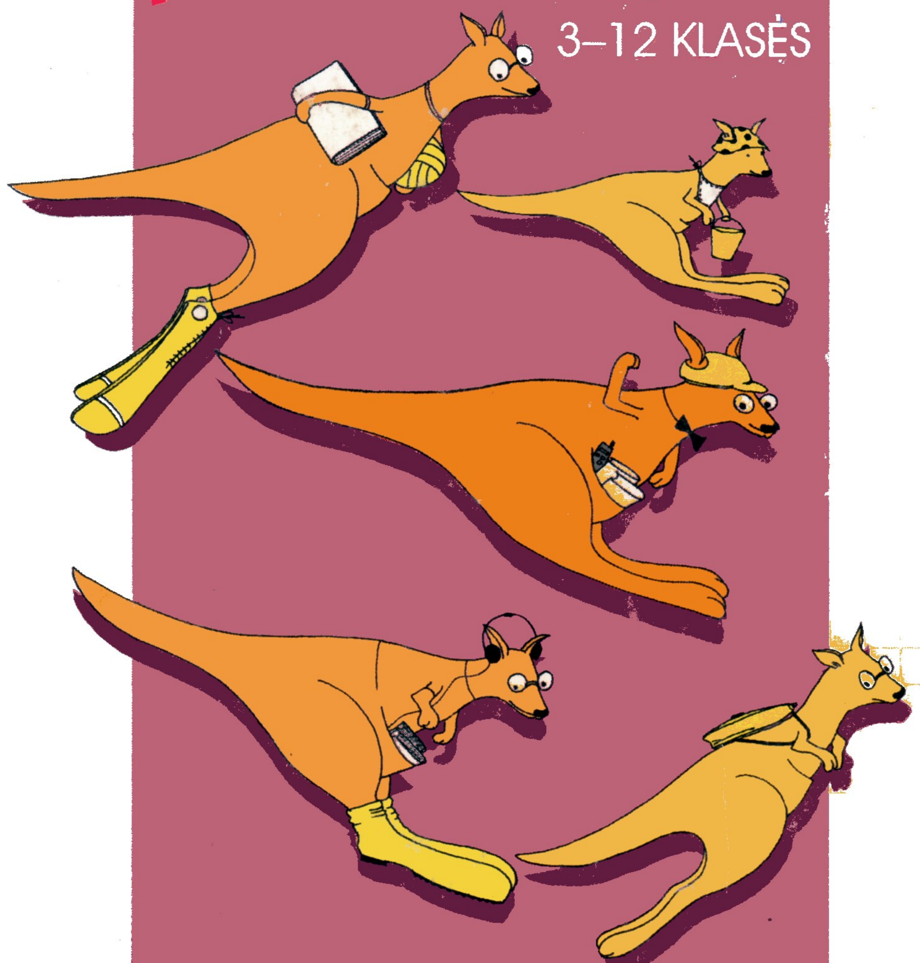
KENGŪRA 2001



KONKURSO

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

КЕНГУРУ 2001

KANGUR 2001

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2001

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS K O N K U R S O UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Sudarė JUOZAS MAČYS

TEV

VILNIUS 2001

UDK 51(079)
Ke108

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*
Programinė įranga *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika *Edita Tatarinavičiūtė*
Gamybos vadovas *Algimantas Paškevičius*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Loreta Giriūnienė*
Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http//www.tev.lt

ISBN 9955-491-13-2

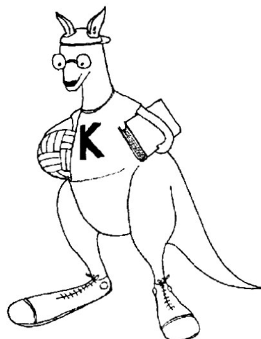
TURINYS

ATMINTINĖ

KONKURSO DALYVIUI

- Perskaityk dalyvio kortelės pildymo instrukciją.
- Prieš pradėdamas spręsti užpildyk dalyvio kortelę. Kortelę pildyk pieštuku, kad suklydęs galėtum ištrinti. Nepamiršk įrašyti savo pavardę ir vardą didžiosiomis raidėmis grafoje „Pavardė ir vardas“.
- Uždavinių sprendimui skiriamos 75 minutės – nesustok prie vieno uždavinio ilgiau kaip 3 minutėms, kol neperžiūrėsi visų uždavinių.
- Iš penkių pateiktų uždavinio atsakymų teisingas tik vienas – išsirink jį!
- Būk atidus užpildydamas atsakymų lentelę.
- Atmink, kad spėliodamas rizikuoji – už neteisingą atsakymą atimami taškai.
- Atsakymų nerodyk draugui – gali nukentėti pats.
- Neskubėk įteikti kortelę anksčiau laiko – geriau dar kartą patikrink atsakymus.





PRATARMĖ

Nėra pasaulyje populiaresnių moksleivių matematikos varžybų kaip tarptautinis „Kengūros“ žaidimas-konkursas. Prasidėjęs Australijoje, jis greitai išplito Europoje. 1994 metais buvo įkurta asociacija „Kengūra be sienų“ (*Kangourou sans frontières*), į kurią įstojo Ispanija, Prancūzija, Didžioji Britanija, Vengrija, Italija, Liuksemburgas, Moldavija, Olandija, Lenkija, Rusija, Slovėnija. Vėliau prie jos prisijungė Estija, Baltarusija, Makedonija, Čekija, Vokietija, Rumunija, Ukraina, Bulgarija, Slovakija, Švedija, Kroatija, Austrija, Gruzija, Islandija, Airija, Lietuva ir kitos šalys. Pernai į asociaciją įstojo Meksika, Brazilija, taigi dabar „Kengūra“ nebėra vien Europos renginys, o jos dalyvių skaičius peržengė du su puse milijono.

Lietuvoje „Kengūros“ konkursas atskirose mokyklose organizuojamas jau nuo 1995 metų. Iki 1998 metų užduočių sąlygos būdavo parsisiunčiamos rusų ir lenkų kalbomis, ir tik 1999 metais jos buvo parengtos lietuviškai. 1999 metų lapkričio mėnesį buvo sukurtas Lietuvos „Kengūros“ konkurso organizavimo komitetas, į kurį įėjo Švietimo ir mokslo ministerijos, Matematikos ir informatikos instituto, Vilniaus universiteto ir mokyklų atstovai.

Kad mokiniai galėtų geriau pasirengti konkursams, organizavimo komiteto bei Matematikos ir informatikos instituto rūpesčiu buvo išleistos knygelės „Kengūra. Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai“, TEV, Vilnius, 1999, ir „Kengūra 2000. Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai“, TEV, Vilnius, 2000.

Lietuvoje, kaip ir daugelyje šalių, 2001 metų konkursas įvyko kovo 17 dieną (sutinkamai su nustatyta formule — kovo trečią ketvirtadienį). Konkurse dalyvavo 47 765 moksleiviai iš 1026 Lietuvos mokyklų.

Kaip konkursas organizuojamas, pasakojama matematikos ir informatikos žurnale „Alfa plius omega“, 2000 m. Nr. 1, kurį galima rasti mokyklų bibliotekose.

Geriausiai pasirodžiusių moksleivių penkiasdešimtukai yra pateikti specialioje knygelėje „Kengūra 2001 (Rezultatai)“, kurią gavo kiekviena mokykla bei visų rajonų (miestų) švietimo skyriai, ir Internete (http://www.kengura.lt). Kiekviena mokykla dar gavo savo visų dalyvavusių moksleivių rezultatus, o kiekvienas rajono (miesto) švietimo skyrius — geriausių savo rajono (miesto) kiekvienos klasės dešimtukų rezultatus.

Suvedant rezultatus vėl iškilo *identiškų atsakymų* problema. Penkiasdešimtukų sąrašuose *kursyvu* išskirti du tos pačios mokyklos moksleiviai, kurių atsakymų rinkiniai buvo visiškai vienodi (t. y. kompiuteris nustatė, kad sutapo *visi* — ir teisingi, ir neteisingi atsakymai). Svarstant šią problemą, konkurso organizavimo komitete išsiskyrė dvi nuomonės: a) tegul lieka sąraše; b) išmesti, nes tikimybė, kad savarankiškai sprendžiant pakankamai sudėtingus uždavinius per trumpą laiko tarpą bus padarytos visos tos pačios klaidos, nepaprastai maža net šalies mastu, o dažniausiai tokių atvejų pasitaikė toje pat mokykloje. Galų gale buvo priimtas kompromisinis sprendimas — rajonams ir mokykloms buvo palikta teisė patiems spręsti, buvo ar nebuvo pažeistos konkurso sąlygos (pvz., ar buvo galimybių nusirašyti, spręsti kolektyviai, spręsti ilgiau nei 75 minutes ir pan.) ir kaip traktuoti identiškus darbus. Be to, *visiems* konkurse dalyvavusiems moksleiviams, nepriklausomai nuo rezultatų, buvo įteikti gražūs konkurso organizavimo komiteto padėkos pažymėjimai. Kiekvienas mokinys atminimui gavo suvenyrinį „Kengūros“ pieštuką ir konkurso užduočių lapelį. Tačiau į sąrašus geriausiai Lietuvoje pasirodžiusių moksleivių, kurie apdovanojami diplomais ir specialiais „Kengūros“ prizais, vis dėlto nutarta netraukti trijų ir daugiau

vienos klasės moksleivių, kurių rezultatai identiški. Taip pat jei kurios nors mokyklos *toje pačioje grupėje* kompiuterinė programa surado daugiau kaip du identiškus visų uždavinių atsakymus, jų autoriai buvo iškelti į penkiasdešimtukų sąrašo galą už brūkšnio. O štai „porelėms" nutarta išrašyti vieną diplomą ir skirti vieną prizą — tikintis, kad jie taip pat draugiškai pasidalys apdovanojimus.

Geriausieji „mažyliai" ir „bičiuliai" buvo pakviesti dalyvauti Šiaulių ir Vilniaus universitetų organizuotose Lietuvos jaunesniųjų klasių olimpiadose. Šeši geriausiai konkurse pasirodę „kadetai" kartu su dar šešiais lenkų mokyklų moksleiviais vyko į tarptautinę „kengūrininkų" vasaros stovyklą Zakopanėje (Lenkija). Savo ruožtu būrys mūsų geriausiųjų „kadetų" birželio mėnesį prie Baltijos jūros Giruliuose priiminėjo Lenkijos „kengūrininkų" atstovus. Vyresniųjų klasių nugalėtojai gegužės mėnesį dalyvavo matematikos stovyklose Vilniuje ir Minske (Baltarusija), kur turėjo progos pabendrauti su savo bendraamžiais — Lietuvos ir Baltarusijos matematikos olimpiadų nugalėtojais. Iš visų grupių po vieną atstovą pateko į Lietuvos komandą, kuri liepos mėnesį dalyvavo pirmajame „Kengūros" komandiniame čempionate Rumunijos kalnų kurorte Poiana Pinului. Visi kiti sėkmingai pasirodę dalyviai išsidalijo gausybę prizų — knygų ir specialių „Kengūros" dovanų.

Tuo tarpu „Kengūra" jau ruošiasi naujiems turnyrams. Kartą metuose „Kengūros" asociacijos šalių atstovai susirenka į suvažiavimą. Šiemet toks suvažiavimas įvyko Sinajoje (Rumunija) lapkričio mėnesio 8–12 dienomis. Jame buvo apsvarstytos užduotys, siūlomos 2002 metų konkursui. Prieš suvažiavimą didelį darbą atliko Uždavinių komitetas, kuris iš 400–500 uždavinių, atsiųstų iš įvairių šalių, atrinko po 100 uždavinių kiekvienai iš 5 konkurso grupių. Tokį rinkinį gavo kiekvienos šalies atstovai. Beje, vieni uždaviniai jame pateikiami anglų, kiti — prancūzų kalba, todėl suvažiavimo dalyviai turi gaudytis abiejose kalbose. Iš viso sąrašo balsuojant buvo sudaryti rekomenduojami užduočių variantai (kaip įprasta „Mažylio" grupei — 24 uždaviniai, kitoms grupėms — po 30 uždavinių). Po to tie variantai buvo tikslinami, redaguojami, tad išvažiuodama kiekviena šalis turėjo angliškai parengtą preliminarų užduočių rinkinį (beje, be sprendimų).

Konkurso metu negalima naudotis skaičiuokliais. Konkursas testinis, — tai reiškia, kad tik vienas atsakymas iš 5 pateiktų yra teisingas, ir jūs turite tą atsakymą nustatyti. Gautą atsakymą dalyvis nurodo savo kortelėje (dalyvio kortelės pavyzdys įdėtas 7–8 psl.; ten paaiškinta, kaip ją reikia užpildyti). Jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia pasirašyti sau tą atsakymą, pasižymėti jį, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo greičiausiai neliks). Todėl konkursui ir reikia ruoštis specialiai, ne kaip egzaminui ar olimpiadai: čia įrodinėti nieko nereikia. Dėl šios priežasties konkursas yra labai demokratiškas — sakysime, labai geras, bet lėtas olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

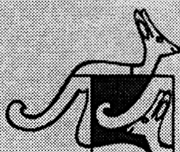
Vertinant už teisingą atsakymą duodamas 1 taškas, už nenurodytą atsakymą — 0 taškų, už neteisingą atsakymą atimama 25% prieš uždavinį nurodyto taškų skaičiaus. Kad nebūtų neigiamų rezultatų, kiekvienam dalyviui iš karto skiriama 30 taškų („mažyliams" — 24 taškai). Vadinasi, teoriškai dalyvis gali gauti nuo 0 iki 150 taškų („mažyliai" — nuo 0 iki 144 taškų).

Šioje knygelėje pateiktos 2001 m. „Kengūros" konkurso užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti ir pasitikrinti, knygelės gale yra duota visų užduočių teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės testą ir atlikti jį per 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo galimybes. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės testu — dauguma vyresniųjų klasių užduočių taip pat prieinamos jaunesniems mokiniams.

Dalyvio kortelė

KODAS

Tarptautinis matematikos konkursas
KENGŪRA



Mokykla

Klasė (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12)

Grupė
- Mažylis (M)
- Bičiulis (B)
- Kadetas (K)
- Junioras (J)
- Senjoras (S)

Kalba
- Lietuvių (L)
- Lenkų (P)
- Rusų (R)

PAVARDĖ VARDAS

(A) (Ą) (B) (C) (Č) (D) (E) (Ę) (Ė) (F) (G) (H) (I) (Į) (Y) (J) (K) (L) (M) (N) (O) (P) (R) (S) (Š) (T) (U) (Ų) (Ū) (V) (Z) (Ž) (-)

A T S A K Y M A I

1 (A) (B) (C) (D) (E)
2 (A) (B) (C) (D) (E)
3 (A) (B) (C) (D) (E)
4 (A) (B) (C) (D) (E)
5 (A) (B) (C) (D) (E)
6 (A) (B) (C) (D) (E)
7 (A) (B) (C) (D) (E)
8 (A) (B) (C) (D) (E)
9 (A) (B) (C) (D) (E)
10 (A) (B) (C) (D) (E)

11 (A) (B) (C) (D) (E)
12 (A) (B) (C) (D) (E)
13 (A) (B) (C) (D) (E)
14 (A) (B) (C) (D) (E)
15 (A) (B) (C) (D) (E)
16 (A) (B) (C) (D) (E)
17 (A) (B) (C) (D) (E)
18 (A) (B) (C) (D) (E)
19 (A) (B) (C) (D) (E)
20 (A) (B) (C) (D) (E)

21 (A) (B) (C) (D) (E)
22 (A) (B) (C) (D) (E)
23 (A) (B) (C) (D) (E)
24 (A) (B) (C) (D) (E)
25 (A) (B) (C) (D) (E)
26 (A) (B) (C) (D) (E)
27 (A) (B) (C) (D) (E)
28 (A) (B) (C) (D) (E)
29 (A) (B) (C) (D) (E)
30 (A) (B) (C) (D) (E)

KENGŪRA 2001

Dalyvio kortelės pildymo instrukcija

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite tik minkštu arba vidutinio kietumo juodu pieštuku (B arba HB).
2. Žymėdami raidę ar skaičių, visiškai užtušuokite atitinkamą langelį.

GERAI užtušuoto langelio pavyzdys

Taip žymėti NEGALIMA

3. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.
4. Įrašykite savo mokyklos pavadinimą nurodytoje vietoje.
5. Pažymėkite, kurioje klasėje mokotės, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį eilutėje „Klasė".
6. Pažymėkite, kurioje konkurso grupėje Jūs dalyvaujate, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį stulpelyje „Grupė".
7. Pažymėkite, kuria kalba mokotės, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį stulpelyje „Kalba".
8. Užrašykite raidėmis ir atitinkamai pažymėkite savo pavardę ir vardą. Įrašę vardo ar pavardės raidę į langelį, užtušuokite atitinkamą langelį tame pačiame stulpelyje. Viename stulpelyje gali būti pažymėta tik viena raidė. Tarp pavardės ir vardo palikite tuščią langelį ir tame stulpelyje nieko nežymėkite. Jei Jūsų vardas netelpa eilutėje, tai jį sutrumpinkite – į paskutinį langelį įrašykite tašką ir jį pažymėkite.
9. Išsprendę testo uždavinį, pažymėkite pasirinktą atsakymą dalyvio kortelėje – užtušuokite atitinkamą langelį uždavinio numerį atitinkančioje atsakymų eilutėje.
10. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o už klaidingą atsakymą iš visų testo taškų bus atimta 25% uždavinio taškų.
11. ŠIOS DALYVIO KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI AR GLAMŽYTI.

Atlikę užduotį, konkurso organizaciniam komitetui grąžinkite tik šią kortelę. Užduočių lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai, ir pasitreniravus galima juos tiesiog skaityti. Kad būtų patogiau, sprendimų dalyje po uždavinio numerio iš karto nurodoma, kuris atsakymas teisingas.

? Po to ženklu ? pažymėtas spėjimas. Žinoma, kartais tas spėjimas yra beveik sprendimas, tik spėjime visą laiką remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų pasirinkti atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas iš viso neduodamas ir iš karto pereinama prie sprendimo. Dar kartą pabrėžiame — rengiantis „Kengūros“ konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus „spėjimus“ ar trumpą sprendimą.

?? Ženklu ?? pažymėti kiti spėjimo būdai.

! Ženklu ! žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, perskaityti sprendimą labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai visada pravers laikant egzaminus ar dalyvaujant olimpiadose. Beje, būtent „Kengūros“ konkursui sugalvojama daugybė naujų gražių uždavinių. Po to tuos uždavinius galima atpažinti visur — olimpiadose, valstybinių egzaminų užduotyse ir vadovėliuose.

!! Ženklu !! žymimas kitas sprendimas, dažniausiai trumpesnis, bet reikalaujantis daugiau žinių.

Kaip daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio sprendimas, labai gerai matyti iš uždavinio S11 (žr. jo sprendimą 70 psl.). Atspėti uždavinio atsakymą čia ypač paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį — labai sunku (ir netgi nelabai įdomu).

Stengiantis padėti pasirengti konkursui rusų ir lenkų mokyklų moksleiviams, į knygelę taip pat įdėtos 2001 m. užduotys rusų ir lenkų kalbomis. Tai ypač patogu žemesniųjų klasių moksleiviams, kuriems skaityti matematinį tekstą lietuviškai sunku. Ta proga galima prisiminti, kad Pasaulio matematikos olimpiadoje IMO visi moksleiviai gauna sąlygas ir rašo sprendimus gimtąja kalba.

Pasirengti konkursui taip pat padės ir anksčiau išleistos jau minėtos „Kengūros“ knygelės, kuriose buvo pateiktos ankstesniųjų metų konkursų užduotys ir sprendimai.

Nuoširdžiai dėkojame:

- visiems dalyviams bei konkurso organizatoriams miestuose, rajonuose ir mokyklose, pasistengusiems, kad konkursas vyktų sklandžiai;
- Matematikos ir informatikos institutui, padėjusiam rengti konkursą, bei leidyklai TEV, atlikusiai didžiumą organizacinės veiklos ir visokeriopai rėmusiai konkursą;
- Švietimo ir mokslo ministerijai, glaudžiai bendradarbiavusiai su organizavimo komitetu ir palaikiusiai nuolatinį ryšį su mokyklomis.

2002 metų konkursas įvyks kovo 21 dieną, o sąlygos, kaip ir pernai, bus parengtos lietuvių, lenkų ir rusų kalbomis.

Sėkmės rengiantis konkursui! Kviečiame gausiai dalyvauti!

Visais iškilusiais klausimais prašom kreiptis į organizavimo komitetą — tel.: (8-22) 729318, el. paštas: tev@tev.lt, adresas: Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.

Organizavimo komitetas ir leidėjai

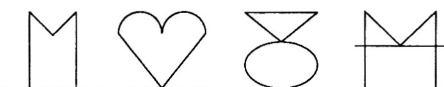
2001 m. konkurso užduočių sąlygos

MAŽYLIS (III ir IV klasės)

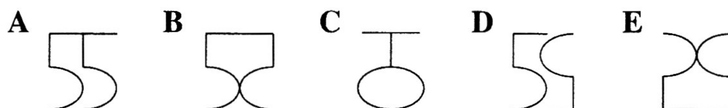


KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

M1. Keturiuose paveikslėliuose pavaizduoti skaičiai nuo 1 iki 4 kartu su savo veidrodiniais atvaizdais.



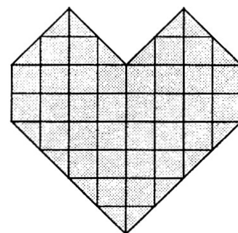
Koks bus penktas paveikslėlis?



M2. Juozas turėjo 7 lazdeles. Vieną iš jų jis perlaužė pusiau. Kiek lazdelių turi Juozas dabar?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

M3. Simas savo mamai nupirko gražią dovanėlę — šokoladinę širdutę. Kiekvienas šokoladinis kvadratėlis sveria 10 g. Kiek sveria visa širdutė?



A 340 g **B** 360 g **C** 380 g

D 400 g **E** 420 g

M4. Skaičius, kuriuo reikia pakeisti X lentelėje, yra

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 X 4 1
1 5 10 10 5 1

M5. Petraičių šeima (tėtė, mama ir jų sūnus) išsinuomojo trivietę valtį. Keliais būdais jie gali susėsti valtyje?

A 9 **B** 8 **C** 6 **D** 4 **E** 3

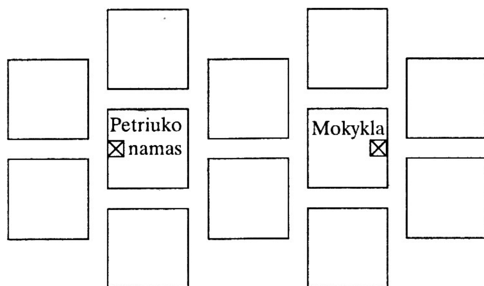
M6. Tik vienas iš čia parašytų pratimų atliktas teisingai. Kuris?

A $12 : (4+8) = 11$ **B** $8 \cdot 2 + 3 = 40$ **C** $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 50$
D $(10+8) : 2 = 14$ **E** $18 - 6 : 3 = 16$

M7. Mokyklos kieme yra 19 mergaičių ir 12 berniukų. Kiek dar mažiausiai vaikų turi prie jų prisijungti, kad juos visus galima būtų suskirstyti į 6 vienodo dydžio grupes?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

M8. Piešinyje pavaizduotas Petriuko gyvenamosios vietos planelis. Kiekvienas kvartalas yra kvadratas, kurio kraštinė 100 m. Koks yra trumpiausias atstumas, kurį Petriukui tenka nueiti iš namų iki mokyklos?



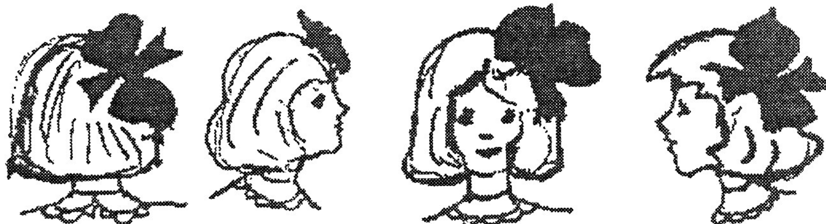
A 100 m **B** 200 m **C** 350 m **D** 450 m **E** 500 m

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

M9. Petriukas gimė tą dieną, kai Onutei sukako treji metai. Kiek metų bus Petriukui, kai Onutė bus dvigubai už jį vyresnė?

A 1 metai **B** 2 metai **C** 3 metai **D** 4 metai **E** 10 metų

M10. Mergaitės kaspinas surištas prie dešinės ausies. Ji stovi prie veidrodžio. Kelis iš žemiau pavaizduotų paveikslėlių įmanoma pamatyti veidrodyje?



A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

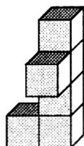
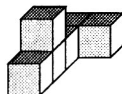
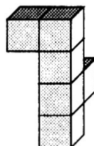
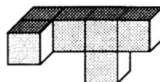
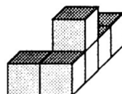
M11. Keletas kengūrų stovėjo ratu. Joms buvo išdalyta 20 saldainių. Kiekviena kengūra gavo bent vieną saldainį, bet jokios dvi kengūros negavo saldainių vienodai. Kiek daugiausiai kengūrų galėjo stovėti ratu?

A 20 **B** 10 **C** 8 **D** 6 **E** 5

M12. Betė ir Ketė važiavo supertraukinuku. Betė įlipo į 17-tą vagonėlį nuo traukinuko priekio, o Ketė įlipo į 34-tą vagonėlį nuo galo. Jos labai nustebo, kad atsidūrė tame pačiame vagonėlyje. Kiek vagonėlių traukinuke?

A 48 **B** 49 **C** 50 **D** 51 **E** 52

M13. Kuris iš penkių paveikslėlių vaizduoja kūną, kuris skiriasi nuo kūno, pavaizduoto kituose keturiuose paveikslėliuose?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

M14. Adomas ir Marius renka pašto ženklus. Tam tikru momentu abu jie turėjo po tiek pat ženklų. Mariaus gimimo dieną Adomas jam padovanojo pusę savo kolekcijos. Dabar Marius turi daugiau ženklų negu Adomas. O kiek gi kartų daugiau?

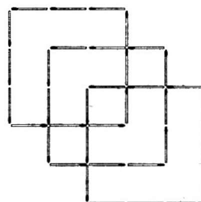
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** Tai priklauso nuo turėtų ženklų skaičiaus

M15. Ant stalo guli trikampiai ir keturkampiai, kurie neliečia vienas kito. Iš viso jie kartu turi 17 viršūnių. Kiek trikampių yra ant stalo?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

M16. Kiek mažiausiai degtukų reikia pridėti prie pavaizduotos konfigūracijos, kad joje būtų lygiai 11 kvadratų?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

M17. Aš turiu tris krepšelius, kurių kiekviename yra 11 saldainių. Aš imu po vieną saldainį iš kiekvieno krepšelio tokia tvarka: iš kairiojo, iš vidurinio, iš dešiniojo, iš vidurinio, iš kairiojo, iš vidurinio ir t. t., kol vidurinis krepšelis ištuštės. Kiek saldainių bus tame krepšelyje, kuriame jų liko daugiau?

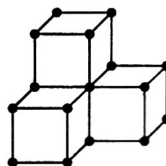
A 1 **B** 2 **C** 5 **D** 6 **E** 11

M18. Didžiojoje miško batų parduotuvėje buvo po 12 porų batų kiekvienoje iš 10 lentynų. Pirmieji lankytojai buvo šimtakojai. Trys iš jų nusipirko po 30 porų kiekvienas, kiti du pirko tik po 5 poras kiekvienas. Kiek porų batų liko parduotuvėje po šimtakojų apsilankymo?

A 10 **B** 15 **C** 20 **D** 25 **E** 30

M19. Jaunojo konstruktoriaus rinkinį sudaro pagaliukai ir jungiamieji rutuliukai. Vaikai sudėjo konstrukciją iš keturių kubų (žr. paveikslėlį). Kiek jiems prireikė rutuliukų?

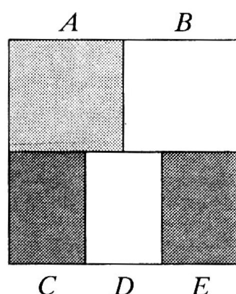
A 16 **B** 18 **C** 20 **D** 21 **E** 22



M20. Kiek yra triženklių skaičių, kurių skaitmenų suma lygi 4?

A 10 **B** 9 **C** 8 **D** 7 **E** 6

M21. Penkios draugės sudėjo savo rankšluosčius pliaže taip, kad jie sudarė didelį kvadratą. Rankšluosčiai *A* ir *B* kvadratiniai, to paties dydžio, ir kiekvieno perimetras 720 cm. Rankšluosčiai *C*, *D* ir *E* yra vienodi stačiakampiai. Koks yra rankšluosčio *E* perimetras?



A 600 cm **B** 560 cm **C** 440 cm **D** 360 cm **E** 300 cm

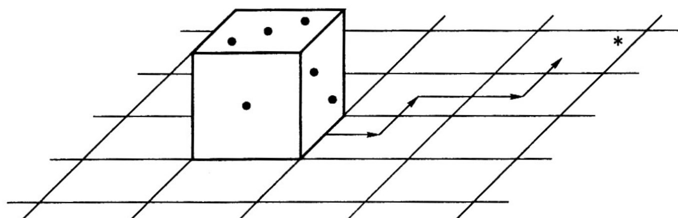
M22. Zita turi keturias žvakes. Kiekviena žvakė sudega per 3 valandas. Zita uždega dvi žvakes. Po 30 minučių vėjo gūsis užpučia vieną žvakę, dar po valandos kitas gūsis užpučia antrą žvakę. Tada Zita nusprendžia uždegti visas keturias žvakes. Kiek laiko praeis nuo šio momento, kol užges paskutinė žvakė, jei vėjas jų nebeužpūs?

A 1 h 30 min **B** 2 h **C** 3 h **D** 7 h 30 min **E** 8 h

M23. Algis turi tiek pat pinigų, kiek Balys ir Česlovas kartu. Balys turi 10 litų daugiau negu Česlovas. Visi trys berniukai turi 40 litų. Kiek litų turi Česlovas?

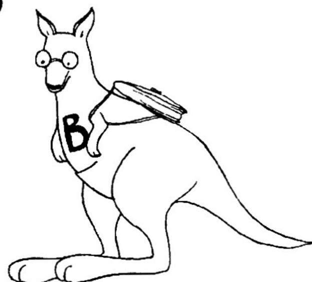
A 4 **B** 5 **C** 10 **D** 15 **E** 20

M24. Lošimo kauliukas padėtas ant kvadratėliais sudalytos plokštumos kaip pavaizduota. Kauliuko priešingųjų sienų taškų suma lygi 7. Ridenkime kauliuką, kiekvieną kartą jį perversdami per briauną kryptimi, nurodyta rodyklėmis. Kiek taškų bus viršutinėje sienoje, kai kauliukas atsidurs kvadratėlyje, pažymėtame žvaigždute $*$?



A 5 **B** 4 **C** 3 **D** 1 **E** Kitas atsakymas

BIČIULIS (V ir VI klasės)

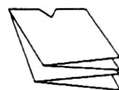


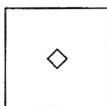
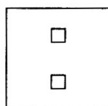
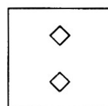
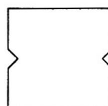
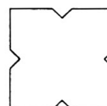
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

B1. Kengūra apskaičiavo reiškinio $2 \times 0 + 0 \times 1$ reikšmę. Ji gavo

A 2 **B** 0 **C** 1 **D** 2001 **E** 3

B2. Kuris iš žemiau pavaizduotų lapų atitinka sulankstytą lapą, pavaizduotą dešinėje?

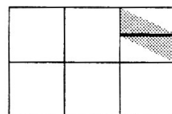


A  **B**  **C**  **D**  **E** 

B3. Senas močiutės laikrodis vėluoja 20 sekundžių per valandą. Kiek laikrodis vėluos po 24 valandų?

A 7 min **B** 8 min **C** 9 min **D** 10 min **E** 11 min

B4. Kuri figūros dalis užtušuota?



A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{8}$ **C** $\frac{1}{10}$ **D** $\frac{1}{12}$ **E** $\frac{1}{15}$

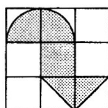
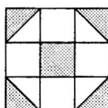
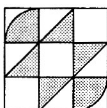
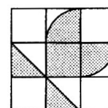
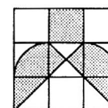
B5. Lėktuve yra 108 vietos keleiviams. Kiekvieniems dviem keleiviams tenka viena laisva vieta. Kiek keleivių yra lėktuve?

A 36 **B** 42 **C** 56 **D** 64 **E** 72

B6. Henrikas turi 3 seseris ir 5 brolius. Jo sesuo Danutė turi S seserų ir B brolių. Kam lygi S ir B sandauga?

A 8 **B** 10 **C** 12 **D** 15 **E** 18

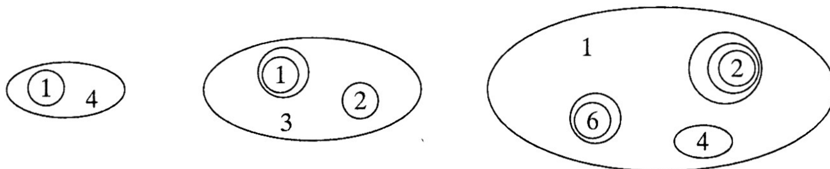
B7. Kuri iš užtušuotų sričių yra didžiausia?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

B8. Imame sveikąjį skaičių. Jį dvigubiname, tada dvigubiname rezultatą, tada dvigubiname dar ir dar kartą. Kuris iš nurodytų skaičių tikrai negali būti galutinis rezultatas?

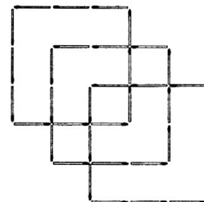
A 80 **B** 1200 **C** 48 **D** 84 **E** 880

B9. Skaičius 14 užrašytas kaip pavaizduota pirmame paveikslėlyje, skaičius 123 — kaip pavaizduota antrame paveikslėlyje. Koks skaičius užrašytas trečiame paveikslėlyje?



A 1246 **B** 2461 **C** 2641 **D** 1462 **E** Kitas atsakymas

B10. Kiek mažiausiai degtukų reikia pridėti prie pavaizduotos konfigūracijos, kad joje būtų lygiai 11 kvadratų?



A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

B11. Lukas ir Mantas bėga aplink stadioną. Lukui vienam ratui reikia 3 minučių, o Mantui — 4 minučių. Jie pradeda bėgti kartu. Po kelių minučių jie pirmą kartą vienu metu kirs starto liniją?

A Po 6 min **B** Po 8 min **C** Po 10 min **D** Po 12 min
E Tai priklauso nuo rato ilgio

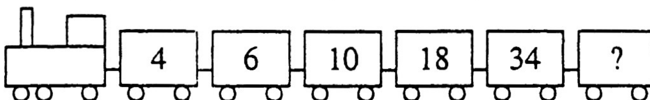
B12. Edvardas turi 201 monetą. Trečdalis iš jų yra vieno euro monetos, trečdalis — penkių eurų monetos, o likusios yra dešimties eurų monetos. Kiek eurų turi Edvardas?

A 1072 **B** 201 **C** 972 **D** 1062 **E** 2001

B13. Bėgimo varžybose buvo apdovanojami tik tie berniukai, kurie įveikė 10 kilometrų. Greitutis Trepsėnas sugebėjo įveikti 9641 metrą, 3456 decimetrus ir 12340 milimetrų ir visiškai išsekęs sustojo. Kiek centimetrų jam pritrūko iki finišo linijos?

A 1060 **B** 160 **C** 106 **D** 100 **E** 96

B14. Koks yra kengūrų traukinio paskutinio vagono numeris?



A 52 **B** 64 **C** 66 **D** 72 **E** 88

B15. Jeigu raudonasis slibinas turėtų 6 galvomis daugiau negu žaliasis, tai jie kartu turėtų 34 galvas. Bet iš tikrųjų raudonasis slibinas turi 6 galvomis mažiau negu žaliasis. Kiek galvų turi raudonasis slibinas?

A 6 **B** 8 **C** 12 **D** 14 **E** 16

B16. Stačiakampio sklypo ilgis yra 80 m, o plotas yra 3200 m^2. Raskite ilgį kito sklypo, kurio plotas ir plotis yra dukart mažesni už pirmojo.

A 20 m **B** 40 m **C** 60 m **D** 80 m **E** 100 m

B17. Visus namų darbus Daiva atliko lygiai per 1 valandą. Trečdalį laiko jai užėmė matematika, o dvi penktąsias likusio laiko — geografija. Kiek laiko ji mokėsi likusius dalykus?

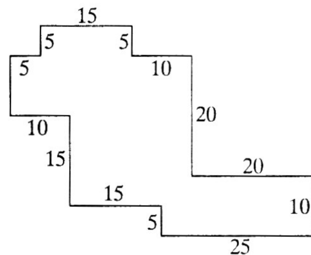
A 12 min **B** 20 min **C** 24 min **D** 36 min **E** 40 min

B18. Prieš trejis metus trynukų Pauliaus, Simo ir Viliaus bei jų ketveriais metais vyresnės sesers Ulos amžių suma buvo 24 metai. Kiek metų Ulai dabar?

A 5 **B** 8 **C** 9 **D** 12 **E** 15

B19. Sodo plane kraštinių ilgiai nurodyti metrais. Sodo plotas kvadratiniais metrais lygus

A 700 **B** 750 **C** 800 **D** 850 **E** 900

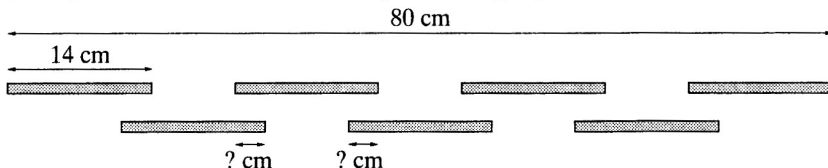


B20. Per savo atostogas Alius, Benas ir Domas kartu uždirbo 280 litų. Alius dirbo dukart ilgiau už Beną ir keturis kartus ilgiau už Domą. Kiek litų turėtų gauti Domas?

A 30 **B** 40 **C** 50 **D** 60 **E** 70

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

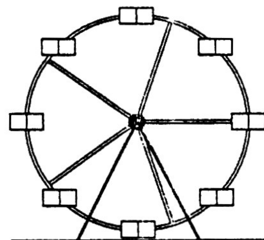
B21. Pavaizduotų septynių lazdelių ilgiai vienodi; vienodi ir tarpai tarp lazdelių. Koks yra ilgis kiekvienos iš vienodo ilgio dalių, pažymėtų klaustukais?



A 1 cm **B** 2 cm **C** 3 cm **D** 5 cm **E** 8 cm

B22. Atrakcionų parko apžvalgos rato kabinos sužymėtos numeriais 1, 2, 3 ir t. t., tarpai tarp jų vienodi. Tuo momentu, kai 25-ta kabina atsiduria žemiausioje padėtyje, 8-ta kabina atsiduria aukščiausioje padėtyje. Kiek kabinų turi apžvalgos ratas?

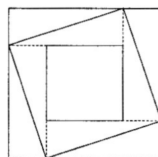
A 33 **B** 34 **C** 35 **D** 36 **E** 37



B23. Šimtametis bukas per valandą išskiria 1,7 kg deguonies. Kiek tokių bukų reikia, kad jų išskirto deguonies užtektų 34 mokiniams vienai valandai, jeigu kiekvienam mokiniui per valandą reikia 0,7 kg deguonies?

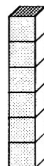
A 10 **B** 12 **C** 14 **D** 15 **E** 21

B24. Didžiojo kvadrato plotas lygus 16, mažojo plotas lygus 4. Raskite pasvirusiojo kvadrato plotą.



A 8 **B** $8\frac{1}{2}$ **C** 10 **D** $10\frac{1}{2}$ **E** 12

B25. Įprastinio lošimo kauliuko priešingųjų sienų taškų suma lygi 7. Algis suklijuoja šešis vienodus kauliukus į vieną kūną kaip parodyta paveikslėlyje. Kiek daugiausiai taškų gali būti suklijuotojo kūno paviršiuje?

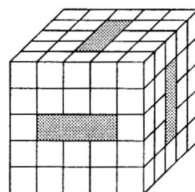


A 106 **B** 91 **C** 95 **D** 84 **E** 96

B26. Kiekvieną žvaigždutę pakeiskite skaitmeniu taip, kad būtų teisinga lygybė: $45 \times *3 = 3***$. Visų keturių įrašytųjų skaitmenų suma

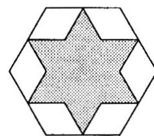
A lygi 20 **B** lygi 21 **C** lygi 17 **D** didesnė už 21 **E** mažesnė už 17

B27. Didžiajame kube, suklijuotame iš mažų kubelių, išpjautos skylės kaip pavaizduota paveikslėlyje. Kiek mažųjų kubelių liko didžiajame kube?



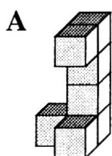
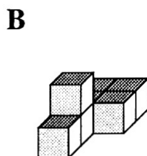
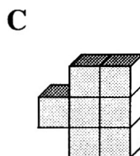
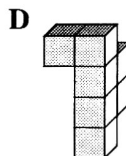
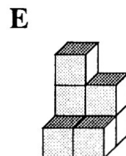
A 88 **B** 80 **C** 70 **D** 96 **E** 85

B28. Paveikslėlyje pavaizduota žvaigždė, įbrėžta į taisyklingąjį šešiakampį. Žvaigždės plotas lygus 6. Koks yra šešiakampio plotas?



A 8 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

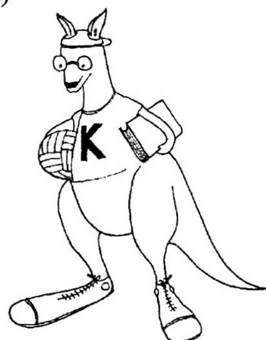
B29. Visų pavaizduotų erdvinių kūnų tūris toks pat. Kurio kūno paviršiaus plotas didžiausias?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

B30. Iš skaitmenų nuo 1 iki 6 galima sudaryti du triženklius skaičius, pavyzdžiui, 645 ir 321. Šių skaičių skirtumas yra 324. O dabar iš tų skaitmenų reikia sudaryti du triženklius skaičius, kurių skirtumas būtų kiek galima mažesnis. Mažiausias įmanomas skirtumas yra

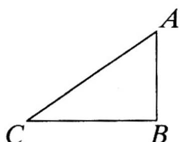
A 69 **B** 56 **C** 111 **D** 47 **E** 38

KADETAS (VII ir VIII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

K1. Popieriaus gabalas yra statusis trikampis, kurio kraštinės lygios 3, 4 ir 5. Sulenkime šį trikampį per tokią tiesę, kad C sutaptų su B, o tada — per tokią tiesę, kad A sutaptų su B.



Tada gautoji figūra bus

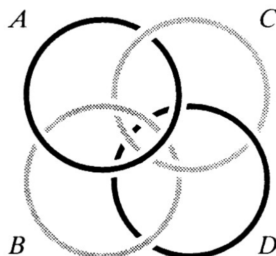
A kvadratas **B** stačiakampis **C** penkiakampis
D netaisyklingasis šešiakampis **E** rombas

K2. Robertas turi supakuoti mėlynas ir raudonas žaislines kengūrėles po 10 į kiekvieną dėžutę. Jis turėjo 178 vienos spalvos kengūrėles ir 121 — kitos spalvos. Kiek dėžučių jam prireiks supakuoti visoms kengūrėlėms, jei į kiekvieną dėžutę dedamos tik vienos spalvos kengūrėlės?

A 13 **B** 18 **C** 24 **D** 30 **E** 31

K3. Kurį iš žiedų reikia perpjauti, kad visi likusieji žiedai atsiskirtų?

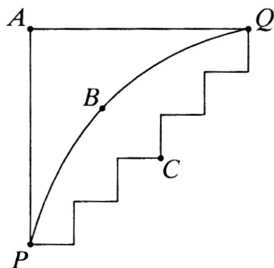
A A **B** B **C** C **D** D **E** Tokio žiedo nėra



K4. Evaldas turi klasės draugų berniukų septyniais daugiau negu klasės draugių mergaičių. Klasėje berniukų yra dukart daugiau negu mergaičių. Kiek klasės draugių turi Evaldo bendraklasė Giedrė?

A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 10

K5. Paveikslėlyje pavaizduotos kelios miestelio gatvės. Kiekvienas iš atstumų nuo A iki P ir nuo A iki Q lygus 500 m. Kelias iš P į Q per A yra 215 m ilgesnis, negu kelias per B. Tada kelias iš P į Q per C, negu kelias per B, yra



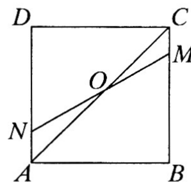
A 275 m ilgesnis **B** 215 m ilgesnis
C 430 m ilgesnis **D** 43 m ilgesnis
E trumpesnis

K6. Iš skaičių -9, -7, -5, 2, 4 ir 6 pasirenkami du skaičiai ir sudauginami. Mažiausias galimas rezultatas lygus

A -63 **B** -54 **C** -18 **D** -10 **E** 8

K7. $ABCD$ — kvadratas. Raskite kampo COM didumą, jeigu $\angle OND = 60°$.

A 10° **B** 15° **C** 20° **D** 30° **E** 35°



K8. Mažutė koala nuėda visus lapus nuo eukalipto per 10 valandų. Jos ir tėtė, ir mama ėda dvigubai greičiau. Per kiek laiko ši trijulė nuės visus lapus nuo vieno eukalipto?

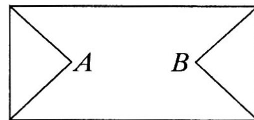
A Per 2 h **B** Per 3 h **C** Per 4 h **D** Per 5 h **E** Per 6 h

K9. Taisyklingojo šešiakampio kraštinė lygi 1, o taisyklingojo trikampio kraštinė lygi 3. Koks yra šešiakampio ir trikampio plotų santykis?

A $\frac{2}{3}$ **B** 2 **C** $\frac{5}{6}$ **D** $\frac{3}{4}$ **E** 1

K10. Kiek yra skirtingų kelių iš taško A į tašką B, jeigu neleidžiama per tą patį tašką eiti daugiau nei vieną kartą?

A 3 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** Ne mažiau kaip 10



KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

K11. Plokštumoje esančio kvadrato kraštinė lygi 1 cm. Kiekviena kvadrato viršūnė yra apskritimo, kurio spindulys lygus 1 cm, centras. Kiek yra taškų, kuriuose kertasi mažiausiai du apskritimai?

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12 **E** 14

K12. Ant kiekvieno iš dviejų stalų į eilę padėtas 2001 riešutas. Nikas ima riešutus nuo pirmo stalo. Iš pradžių jis paima kas trečią riešutą; tada jis ima kas penktą riešutą iš likusių. Mikas ima riešutus nuo antro stalo. Iš pradžių jis paima kas penktą riešutą; tada jis ima kas trečią riešutą iš likusių. Kuris teiginys iš žemiau nurodytų yra teisingas?

A Nikas paėmė $\frac{3}{5}$ Miko paimtų riešutų kiekio

B Mikas paėmė $\frac{3}{5}$ Niko paimtų riešutų kiekio

C Mikas paėmė 1 riešutu daugiau negu Nikas

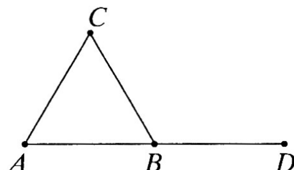
D Nikas paėmė 1 riešutu daugiau negu Mikas

E Nikas ir Mikas paėmė po tiek pat riešutų

K13. Lygybėje $4 \times \overline{KLMNP4} = \overline{4KLMNP}$ kiekviena iš raidžių K, L, M, N ir P žymi tam tikrą skaitmenį. Kokį skaitmenį žymi raidė M?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

K14. ABC yra taisyklingasis trikampis, B yra atkarpos AD vidurio taškas.



Taškas E paimtas taip, kad $DE = AB$. Yra žinoma, kad atstumas tarp C ir E yra didžiausias galimas. Kam lygus kampas BED?

A 45° **B** 30° **C** 20° **D** 15° **E** 10°

K15. 24 valandas rodantis skaitmeninis laikrodis rodo valandas (2 skaitmenys) ir minutes (2 skaitmenys). Kiek kartų nuo vienos minutės po vidurnakčio (00:01) iki vienos minutės prieš vidurnaktį (23:59) laikrodis rodys tokį laiką, kuris nesikeistų skaitant nuo pradžios ir nuo galo (pavyzdžiui, 15:51)?

A 10 **B** 13 **C** 15 **D** 18 **E** 24

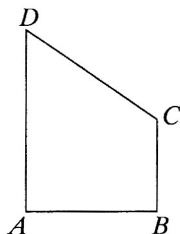
K16. Netgi kai kupranugaris Noras ištroškęs, 84% jo svorio sudaro vanduo. Po to, kai jis atsigeria, jo masė padidėja iki 800 kg, o vanduo sudaro 85% jo masės. Kiek sveria kupranugaris Noras, kai jis ištroškęs?

A 672 kg **B** 680 kg **C** 715 kg **D** 720 kg **E** 750 kg

K17. Romas ir Tomas treniruotėje kiekvienas bėgo pastoviu greičiu: Romas kiekvienus 5 ratus nubėgdavo per 12 minučių, o Tomas kiekvienus 3 ratus per 10 minučių. Jie startavo vienu metu. Kiek ratų jie nubėgo abu kartu iki tol, kol pirmą sykį kartu kirto starto liniją?

A 3 **B** 43 **C** 86 **D** 90 **E** 135

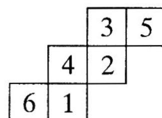
K18. Paveikslėlyje $\angle A = \angle B = 90°$, o $S_{ABCD} : S_{ACB} = 3$.



Raskite plotų santykį $S_{ADB} : S_{ACB}$.

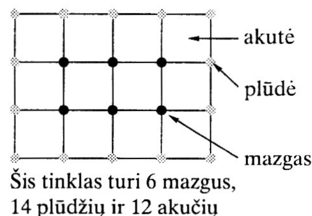
A 2 **B** $\frac{3}{2}$ **C** 1 **D** $\frac{5}{2}$ **E** $\sqrt{2}$

K19. Kubelio sienose surašyti skaičiai nuo 1 iki 6. Jo išklotinė pavaizduota paveikslėlyje. Dauginami 3 skaičiai, kurie parašyti sienose, sueinančiose į vieną viršūnę. Raskite didžiausią iš sandaugų.



A 40 **B** 60 **C** 72 **D** 90 **E** 120

K20. Žvejys pasidarė stačiakampį tinklą. Tinklo viduje yra 32 mazgai, o kraštuose — 28 plūdės. Kiek akučių turi jo tinklas?



Šis tinklas turi 6 mazgus, 14 plūdžių ir 12 akučių

A 40 **B** 45 **C** 54 **D** 60 **E** 64

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

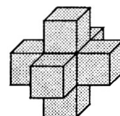
K21. Kiek gabalų neįmanoma gauti iš plokščio apvalaus torto, padarius peiliu keturis tiesius ištisinius pjūvius?

A 5 **B** 7 **C** 9 **D** 11 **E** 12

K22. Kengūrų šuolių varžybose kiekviena dalyvė atlieka penkis šuolius. Už kiekvieną šuolį skiriama nuo 1 iki 20 taškų. Kai dalyvė atlieka visus šuolius, jos blogiausias rezultatas (ar vienas iš blogiausių jos rezultatų, jei mažiausią vienodą taškų skaičių ji gavo už kelis šuolius) neįskaitomas į galutinę sumą. Prieš nubraukiant žemiausią įvertinimą, Džoja už penkis šuolius turėjo 72 taškus. Kokia gali būti mažiausia jos galutinė taškų suma?

A 52 **B** 54 **C** 57 **D** 58 **E** 72

K23. Nijolė pasidarė talismaną iš septynių lošimo kauliukų, suklijavusi juos taip, kad kiekviena pora suklijuotų sienų turėtų po vienodą akučių skaičių. Bežaidžiant talismanas įkrito į skardinę su dažais, ir akučių ant sienų nebesimato. Kiek akučių buvo visame talismano paviršiuje iš pradžių?

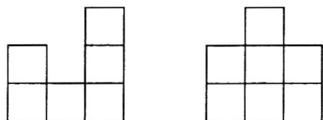


A 95 **B** 102 **C** 105 **D** 112 **E** 126

K24. Imkime mažiausią iš natūraliųjų skaičių, kurių kiekvieno skaitmenų suma lygi 2001. Koks yra to skaičiaus pirmas skaitmuo?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

K25. Paveikslėlyje matote stātinio iš kubelių vaizdą iš kairės ir iš priekio.



Kiek mažiausiai ir kiek daugiausiai kubelių gali būti statinyje?

A 7 ir 13 **B** 8 ir 13 **C** 7 ir 15 **D** 7 ir 16 **E** 8 ir 16

K26. Kai kuriose iš 11 didelių dėžių yra 8 vidutinės dėžės kiekvienoje, kai kuriose iš tų vidutinių dėžių yra 8 mažos dėžės kiekvienoje. Tuščių dėžių yra 102. Kiek dėžių yra iš viso?

A 102 **B** 64 **C** 118 **D** 115 **E** Nustatyti neįmanoma

K27. Kamuolys susiūtas iš juodų ir baltų odos gabaliukų. Juodi gabaliukai yra taisyklingieji penkiakampiai, o balti gabaliukai yra taisyklingieji šešiakampiai. Kiekvieną penkiakampį riboja 5 šešiakampiai, o kiekvieną šešiakampį riboja 3 penkiakampiai ir 3 šešiakampiai. Kamuolys turi 12 juodų penkiakampių. Kiek jis turi baltų šešiakampių?

A 60 **B** 30 **C** 20 **D** 15 **E** 10

K28. Visų šeimos vaikų amžių sandauga yra 1664. Vyriausiasis vaikas yra dvigubai vyresnis už jauniausiąjį. Kiek vaikų yra šeimoje?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

K29. Klasėje yra 10 berniukų. Šeštadienį įvyks įdomios futbolo rungtynės. Kiek yra skirtingų būdų suorganizuoti iš berniukų žiūrovų grupę, jeigu yra žinoma, kad Lukas, jei tik eis žiūrėti rungtynių, būtinai kartu pasiims Matą? (Grupę sudaro mažiausiai du berniukai.)

A 502 **B** 630 **C** 714 **D** 758 **E** 1014

K30. Andrius ir Bartas žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis ima akmenukus iš krūvelės, vienu kartu daugiausia 7. Neleidžiama imti tiek pat akmenukų, kiek jų paskutiniu ėjimu paėmė kitas žaidėjas. Pralaimi tas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Iš pradžių krūvelėje yra 20 akmenukų. Kiek akmenukų turi paimti Andrius pradėdamas žaisti, jeigu jis (teisingai žaisdamas ir toliau) nori laimėti?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

JUNIORAS (IX ir X klasės)

KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

J1. Metame vienu metu tris lošimo kauliukus ir sudedame visas atvirtusias akutes. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti suma?

A 18 **B** 17 **C** 16 **D** 15 **E** 14

J2. Mokiniai *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ir *F* stovi išsirikiavę į eilę. Yra žinoma, kad:
1) *D* stovi tarp *E* ir *F*, 2) *C* — tarp *D* ir *E*,
3) *B* — tarp *C* ir *D*, 4) *A* — tarp *B* ir *C*.
Kuris iš žemiau parašytų teiginių yra teisingas?

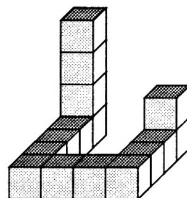
A *A* stovi eilės krašte (kairiajame arba dešiniajame)
B *A* yra antras nuo krašto
C *A* yra trečias nuo vieno iš kraštų
D Taip sustatyti mokinių neįmanoma
E Kitas atsakymas

J3. Daugiakampio perimetras lygus 31 cm. Viena iš jo įstrižainių dalija daugiakampį į du daugiakampius, kurių perimetrai yra 21 cm ir 30 cm. Tada tos įstrižainės ilgis yra

A 5 cm **B** 10 cm **C** 15 cm **D** 20 cm **E** Nustatyti neįmanoma

J4. Pavaizduotas kūnas sudarytas iš vienetinių kubelių. Kiek mažiausiai vienetinių kubelių reikia pridėti, kad susidarytų vienas didelis kubas? (Esamų vienetinių kubelių judinti negalima.)

A 49 **B** 60 **C** 65 **D** 110 **E** 125

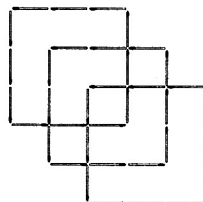


J5. Jeigu *m* yra toks natūralusis skaičius, kad skaičių *m* ir 35 didžiausiasis bendrasis daliklis didesnis už 10, tai tikrai

A *m* turi bent tris skaitmenis
B *m* yra skaičiaus 35 kartotinis
C *m* dalijasi iš 15
D 35 yra skaičiaus *m* kartotinis
E *m* dalijasi iš 5 arba iš 7, bet tik iš vieno jų

J6. Kiek mažiausiai degtukų reikia pridėti prie pavaizduotos konfigūracijos, kad joje būtų lygiai 11 kvadratų?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

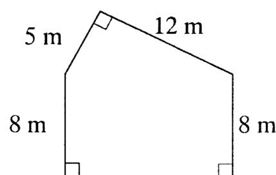


J7. Kiek yra pirminių skaičių, mažesnių už 2001, kurių skaitmenų suma lygi 2?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** Daugiau kaip 4

J8. Pavaizduoto sklypo tvoros ilgis lygus

A 38 m **B** 41 m **C** 46 m **D** 50 m **E** 59 m

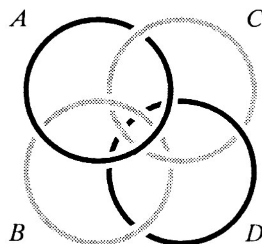


J9. Kiek skaitmenų turi mažiausias natūralusis skaičius, kuris užrašomas vien nuliais ir vienetais ir dalijasi iš 225?

A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 14

J10. Kurį iš žiedų reikia perpjauti, kad atsiskirtų visi likusieji žiedai?

A *A* **B** *B* **C** *C* **D** *D* **E** Tokio žiedo nėra



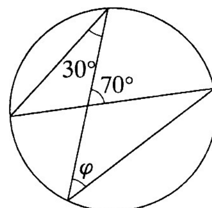
KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

J11. Natūralieji skaičiai a, b, c ir d tenkina lygybes $a+b=cd$ ir $a+b+c=12$. Kiek skirtingų reikšmių gali įgyti skaičius d?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

J12. Kiek laipsnių turi kampas φ brėžinyje?

A 30° **B** 35° **C** 40° **D** 45° **E** 50°



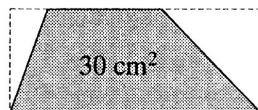
J13. Laikrodis pavėluoja X minučių per kiekvienas Y valandų. Kiek valandų pavėluos laikrodis per savaitę?

A $\frac{2X}{5Y}$ **B** $\frac{5Y}{2X}$ **C** $\frac{14X}{5Y}$ **D** $\frac{5Y}{14X}$ **E** $\frac{168X}{Y}$

J14. Kasparas turėjo 400 kronų, ir jam reikėjo nupirkti 100 šokoladukų po 4 kronas. Supermarkete jis perskaitė, kad už kiekvienus šešis šokoladukus, įsidėtus į vežimėlį, prie kasos duodamas vienas papildomas šokoladukas. Kiek kronų gali sutaupyti Kasparas pirkdamas šokoladukus?

A 52 **B** 56 **C** 60 **D** 64 **E** 68

J15. Nuo stačiakampio, pavaizduoto dešinėje, atkirpti du trikampiai. Likusios trapecijos plotas lygus 30 cm^2, o vienas jos pagrindas dukart didesnis už kitą. Koks yra atkirptų trikampių bendras plotas?



A 10 cm^2 **B** 12 cm^2 **C** 15 cm^2 **D** 18 cm^2 **E** 20 cm^2

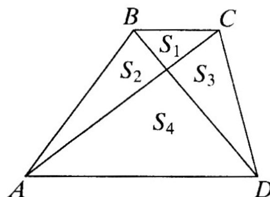
J16. Netgi kai kupranugaris Noras ištroškęs, 84% jo svorio sudaro vanduo. Po to, kai jis atsigeria, jo masė padidėja iki 800 kg, o vanduo sudaro 85% jo masės. Kiek sveria kupranugaris Noras, kai jis ištroškęs?

A 672 kg **B** 680 kg **C** 715 kg **D** 720 kg **E** 750 kg

J17. Visų šeimos vaikų amžių sandauga yra 1664. Vyriausiasis vaikas yra dvigubai vyresnis už jauniausiąjį. Kiek vaikų yra šeimoje?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

J18. Trapeciją $ABCD$ jos įstrižainės dalija į 4 trikampius, kurių plotai yra S_1, S_2, S_3, S_4 (žr. brėžinį). Jeigu $S_2 = 3 \cdot S_1$, tai



A $S_4 = 3S_1$ **B** $S_4 = 4S_1$ **C** $S_4 = 6S_1$

D $S_4 = 9S_1$ **E** $S_4 = 12S_1$

J19. Reiškinyje $2 * 4 * 6 * 8 * 10 * 12 * 14$ kiekvieną žvaigždutę galima pakeisti ženklu $+$ arba $-$. Kurio iš pateiktųjų skaičių taip gauti negalima?

A 0 **B** 4 **C** -4 **D** 48 **E** 30

J20. Dalyboje $999 : n$ daliklis n yra dviženklis skaičius, o liekana yra 3. Tada liekana dalyboje $2001 : n$ yra

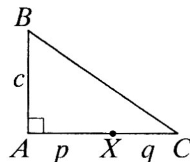
A 3 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 9

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

J21. Saldaininėje buvo 31 saldainis. Pirmą dieną Kristė suvalgė $\frac{3}{4}$ to kiekio, kurį pirmą dieną suvalgė Paulius. Antrą dieną Kristė suvalgė $\frac{2}{3}$ to kiekio, kurį antrą dieną suvalgė Paulius. Pasibaigus antrai dienai, saldaininė buvo tuščia. Kiek saldainių suvalgė Kristė?

A 9 **B** 10 **C** 12 **D** 13 **E** 15

J22. Statusis trikampis ABC vaizduoja sklypą $AB = c$, $AX = p$ ir $XC = q$. Jonas ir Vytas eina aplink sklypą priešingomis kryptimis, pradėję eiti vienu metu iš taško X. Jie susitinka taške B. Kokia yra q išraiška dydžiais p ir c?



A $\frac{p}{2} + c$ **B** $\frac{pc}{2p + c}$ **C** $\sqrt{p^2 + c^2} + \frac{c}{2}$ **D** $\frac{p + c}{2}$ **E** $c - p$

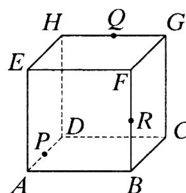
J23. Kai kuriose iš 11 didelių dėžių yra 8 vidutinės dėžės kiekvienoje, kai kuriose iš tų vidutinių dėžių yra 8 mažos dėžės kiekvienoje. Tuščių dėžių yra 102. Kiek dėžių yra iš viso?

A 102 **B** 64 **C** 118 **D** 115 **E** Nustatyti neįmanoma

J24. Skaičius a lygus $1997^{1998} + 1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001}$. Paskutinis skaičiaus a skaitmuo yra

A 0 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

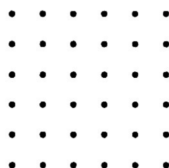
J25. Kubo $ABCDEFGH$ kraštinė lygi 2 cm. P, Q ir R atitinkamai yra briaunų AD, GH ir BF vidurio taškai. Kam lygus trikampio PQR plotas?



A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2 **B** $3\sqrt{3}$ cm^2 **C** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2 **D** $2\sqrt{3}$ cm^2

E $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2

J26. Pavaizduotoje gardelėje atstumas tarp horizontaliai ir vertikaliai gretimų taškų yra 1 cm. Du gardelės taškus reikia sujungti atkarpa taip, kad jos ilgis būtų 5 cm. Kiek tokių atkarpų galima nubrėžti?

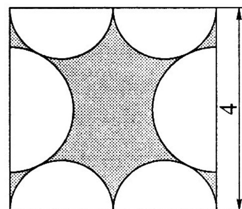


A 10 **B** 12 **C** 24 **D** 34 **E** 36

J27. Nubraukus natūraliojo skaičiaus paskutinį skaitmenį, skaičius sumažėja 14 kartų. Kiek yra natūraliųjų skaičių, turinčių tokią savybę?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

J28. Pavaizduoto kvadrato plotas lygus A, bendras šešių pusskritulių plotas lygus B. Tada $A - B$ reikšmė lygi



A 8 **B** $16 - 3\pi$ **C** $16 - 4\pi$ **D** $16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$

E $16 - 4\pi + \sqrt{5}\pi$

J29. Keliais būdais stačiakampį 2×8 galima uždengti nepersidengiančiais stačiakampiais 1×2?

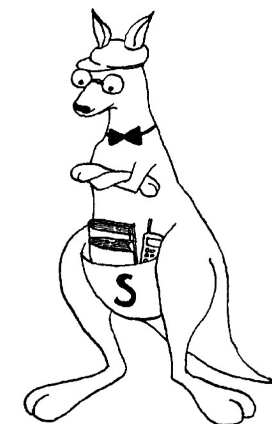
A 16 **B** 21 **C** 30 **D** 32 **E** 34

J30. Keliais būdais galima išreikšti skaičių 30 trijų natūraliųjų skaičių suma? (Išraiškos, kurios skiriasi tik dėmenų tvarka, laikomos nesiskiriančiomis.)

A 105 **B** 75 **C** 81 **D** 362 **E** 101

SENJORAS (XI ir XII klasės)

KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS



S1. Juozas turi 100 pelių, kiekviena iš jų yra arba balta, arba pilka. Iš kiekvienų septynių jo pelių mažiausiai keturios yra baltos. Kiek daugiausiai pilkų pelių gali turėti Juozas?

A 1 **B** 3 **C** 4 **D** 93 **E** 99

S2. Kiek daugiausiai metalinių rutuliukų, kurių spindulys 1 cm, galima įdėti į kubinę dėžutę, kurios tūris lygus 64 cm^3?

A 8 **B** 16 **C** 32 **D** 64 **E** 128

S3. Jeigu $\log_2 10 = a$, tai $\log_{10} 2$ lygu

A $2a$ **B** $\frac{a}{2}$ **C** $5a$ **D** $\frac{a}{5}$ **E** $\frac{1}{a}$

S4. Kiek yra sudėtinių natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000, kurių visų skaitmenų suma lygi 2?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 7 **E** Kitas skaičius

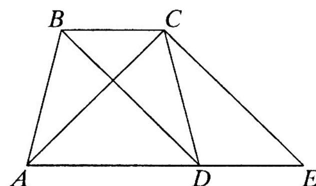
S5. Kam lygi tikimybė, jog atsitiktinai pasirinktas triženklis skaičius bus lyginis ir didesnis už 399?

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{1}{9}$

S6. Skaičius $\dfrac{999\,999\,999\,999\,999\,999}{999\,999\,999} - 1$ yra lygus

A 9^9 **B** $9^9 - 1$ **C** 9^{10} **D** 10^9 **E** 10^{10}

S7. Brėžinyje $BC \parallel AE$, $BD \parallel CE$. Keturkampio $ABCD$ plotą pažymėkime x, trikampio ACE plotą pažymėkime y. Tada



A $x = y$ **B** $x = 2y$ **C** $y = 2x$

D Nustatyti neįmanoma **E** Kitas atsakymas

S8. Natūraliųjų skaičių x, y, z, t ketvertukas tenkina sąlygas $x < y < z < t$ ir $xyzt - 1 = 2001$. Kiek yra tokių ketvertukų?

A 10 **B** 7 **C** 6 **D** 4 **E** 1

S9. Du dviratininkai išvažiuoja iš tos pačios vietos 14:10. Pirmasis važiuoja į šiaurę 32 km/h greičiu, antrasis važiuoja į rytus 24 km/h greičiu. Kurią valandą atstumas tarp jų bus lygus 130 km?

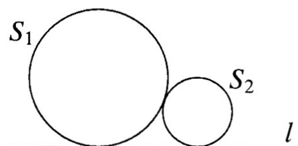
A 16:10 **B** 16:20 **C** 17:10 **D** 17:25 **E** 17:35

S10. Jeigu m yra toks natūralusis skaičius, kad skaičių m ir 35 didžiausiasis bendrasis daliklis didesnis už 10, tai tikrai

A m turi bent tris skaitmenis **B** m yra skaičiaus 35 kartotinis **C** m dalijasi iš 15
D 35 yra skaičiaus m kartotinis **E** m dalijasi iš 5 arba iš 7, bet tik iš vieno jų

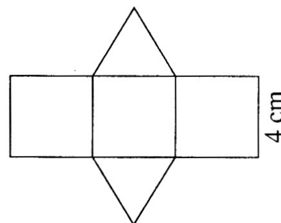
KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Du nevienodo spindulio apskritimai S_1 ir S_2 liečia vienas kitą iš išorės, ir kiekvienas jų liečia tiesę l. Kuris iš žemiau pateiktų teiginių yra teisingas?



A Nėra tokio apskritimo, kuris liestų S_1, S_2 ir l
B Yra lygiai vienas apskritimas, kuris liečia S_1, S_2 ir l
C Yra lygiai du apskritimai, kurie liečia S_1, S_2 ir l
D Yra lygiai keturi apskritimai, kurie liečia S_1, S_2 ir l
E Nė vienas iš teiginių **A**, **B**, **C** ir **D** nėra teisingas

S12. Erdvinio kūno išklotinė susideda iš trijų kvadratų, kurių kraštinės ilgis lygus 4 cm, ir dviejų lygiakraščių trikampių. Kam lygus kūno tūris?



A $16\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ **B** $32\,\text{cm}^3$ **C** $\frac{64}{3}\,\text{cm}^3$
D $32\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ **E** $64\,\text{cm}^3$

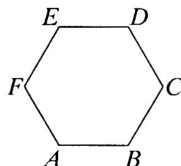
S13. Niujorke 16 pakelių kramtomosios gumos kainuoja tiek dolerių, kiek jūs gaunate pakelių už vieną dolerį. Kiek centų kainuoja vienas pakelis? (1 doleris = 100 centų.)

A 4 **B** 8 **C** 12 **D** 16 **E** 25

S14. Seką 1, 4, 9, 16, ... sudaro natūraliųjų skaičių kvadratai. Skaičius 10^8 yra šios sekos narys. Kam lygus sekantis sekos narys?

A $(10^4+1)^2$ **B** $(10^8+1)^2$ **C** $(10^5)^2$ **D** $(10^8)^2$ **E** $(10^4)^2+1$

S15. $ABCDEF$ yra taisyklingasis šešiakampis. Tada $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2\cdot\overrightarrow{AF}$ lygu

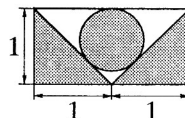


A $\overrightarrow{AA}$ **B** $\overrightarrow{CA}$ **C** $\overrightarrow{FD}$ **D** $\overrightarrow{FB}$ **E** $\overrightarrow{CE}$

S16. Futbolo turnyre kiekviena iš 4 komandų su kiekviena kita žaidė vieną kartą. Galutiniai rezultatai buvo tokie: komanda A — 7 taškai, B — 4 taškai, C — 3 taškai, D — 3 taškai. (Už pergalę buvo skiriami 3 taškai, už lygiąsias — 1 taškas, už pralaimėjimą — 0 taškų.) Kaip baigėsi komandų A ir D rungtynės?

A Laimėjo A **B** Lygiosiomis **C** Laimėjo D
D Tai priklauso nuo rungtynių tarp A ir B rezultato
E Tai priklauso nuo rungtynių tarp A ir C rezultato

S17. Koks yra užtušuotos figūros plotas?

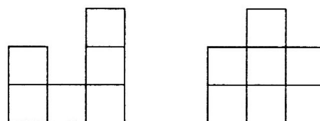


A 1 **B** $\pi+1$ **C** $\frac{\pi}{4}+1$ **D** $\pi(3-2\sqrt{2})+1$ **E** $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

S18. Stačiojo trikampio įžambinė lygi 0,9 cm, o statiniai lygūs a cm ir b cm. Kuris iš nurodytų skaičių yra mažiausias?

A a^2+b^2 **B** $(a+b)^2$ **C** 0,9 **D** $a+b$ **E** ab

S19. Paveikslėlyje matote stãtinio iš kubelių vaizdą iš kairės ir iš priekio. Kiek mažiausiai ir kiek daugiausiai kubelių gali būti statinyje?



A 7 ir 13 **B** 8 ir 13 **C** 7 ir 15

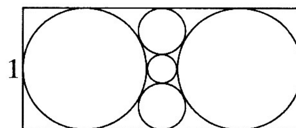
D 7 ir 16 **E** 8 ir 16

S20. Ant kvadrato $ABCD$ kraštinės CD į išorę nubrėžtas lygiakraštis trikampis CDE. Kiek laipsnių turi kampas AEC?

A 30° **B** 36° **C** 45° **D** 54° **E** 60°

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Raskite pavaizduoto stačiakampio ilgesniąją kraštinę.



A $-2+\sqrt{5}$ **B** $\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$ **C** 2,5 **D** $\sqrt{5}$

E $2\sqrt{5}$

S22. Lentelės 43×43 langeliai nuspalvinti 4 spalvomis kaip pavaizduota. Kuri spalva panaudota dažniausiai?

A Pirma
B Antra
C Trečia
D Ketvirta
E Visos spalvos panaudotos vienodą skaičių kartų

1	2	3	4	1	2		…	
2	3	4	1	2	3		…	
3	4	1	2	3			…	
4	1	2	3				…	
1	2	3					…	
2	3						…	
							…	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
							…	

S23. Iš pradžių apskaičiuojama natūraliojo skaičiaus n skaitmenų suma, tada gautojo skaičiaus skaitmenų suma ir t. t., kol gaunamas vienaženklis skaičius, kurį pažymime $l(n)$. Skaičius $l(2001^{2001})$ yra lygus

A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9

S24. Kelios poros iš 00, 11, 22, ..., 88, 99 gali būti natūraliųjų skaičių kvadratų du paskutiniai skaitmenys?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** Daugiau negu 4

S25. Natūraliųjų skaičių m ir n logaritmai yra $\lg m \approx 12{,}3$ ir $\lg n \approx 15{,}4$. Kiek skaitmenų turi sandauga $m \cdot n$?

A 15 **B** 16 **C** 27 **D** 28 **E** 189

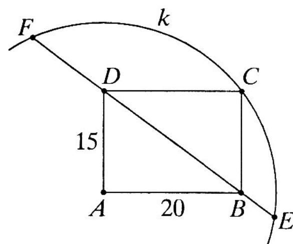
S26. Du suaugę vyrai ir du berniukai nori persikelti per upę maža valtimi, kuria gali plaukti arba du berniukai, arba vienas vyras. Kiek mažiausiai kartų valtis turi kirsti upę, kad visi keturi persikeltų į kitą krantą?

A 3 **B** 5 **C** 9 **D** 11 **E** 13

S27. $ABCD$ yra stačiakampis, o k — apskritimas, kurio centras yra taške A ir kuris eina per tašką C. Koks yra stygos EF ilgis?

A 50 **B** $2\sqrt{20 \cdot 25}$ **C** $2\sqrt{37 \cdot 13}$

D 44 **E** 25



S28. Reiškinio

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2001^2}\right)$$

rezultatas užrašytas nesuprastinamąja trupmena. Kokia yra tos trupmenos skaitiklio ir vardiklio suma?

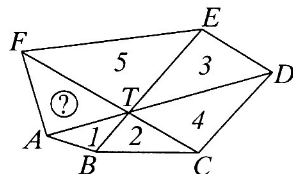
A 2001 **B** 3002 **C** 4003 **D** 5002 **E** 6001

S29. Dėdė Benas pagavo kelias žuvis. Tris didžiausias žuvis jis atidavė šuniui, ir jo laimikio masė sumažėjo 35 procentais. Kai tris mažiausias žuvis jis atidavė katei, tai laimikis dar sumažėjo penkiomis tryliktosiomis likusių žuvų masės. Likusias žuvis šeima suvalgė vakarienei. Kiek žuvų pagavo dėdė Benas?

A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 12

S30. Pavaizduoto iškilojo šešiakampio $ABCDEF$ įstrižainės AD, BE ir CF kertasi taške T. Trikampio FAT plotas yra lygus

A $\frac{6}{5}$ **B** 3 **C** $\frac{10}{3}$ **D** $\frac{24}{5}$ **E** Kitoks

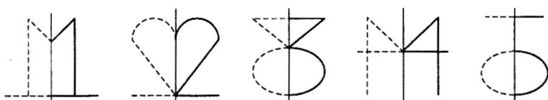


SPRENDIMAI

MAŽYLIS (III ir IV klasės)

M1. Ⓒ

? Matome, kad dešinioji kiekvieno sąlygos paveikslėlio pusė yra atitinkamas skaitmuo, o kairė — jo veidrodinis atvaizdas. Tokią savybę turi paveikslėlis **C**, todėl renkamės atsakymą **C**.



?? Užtenka suvokti, kaip pirmą sąlygos paveikslėlį perskelti į du, kad turėtume vienetą ir jo veidrodinį atvaizdą — užtenka padalyti paveikslėlį pusiau vertikalia linija. Gauname I ir 1. Panašiai iš antro paveikslėlio gauname Ƨ ir 2 ir t. t. Dalijame vertikalia linija atsakymų paveikslėlį **A** — gauname du penketus 5, o ne 5 ir jo veidrodinį atvaizdą ꙅ. Padalijęs paveikslėlį **B**, gauname 5 ir ꙅ. Tai iš tikrųjų 5 ir jo veidrodinis atvaizdas. Tiesa, iki šiol skaitmenys buvo dešinėje, o jų atvaizdai — kairėje. O štai padalijus pusiau paveikslėlį **C**, nebebus ir šio trūkumo — gauname ꙅ ir 5. Beje, čia vertikalioji penketų dalis yra bendra abiem penketams (tokios situacijos pradiniuose paveikslėliuose nebuvo, ir tai gali šiek tiek trikdyti).

! Įdomu, kad kiekvienas iš 5 paveikslėlių, padalytų vertikalia linija, duoda du penketus (tiesa, kartais vienas nėra kito veidrodinis atvaizdas). Paveikslėliuose **B**, **C** ir **E** penketai yra vienas kito veidrodinis atvaizdas; kitaip sakoma, kad jie simetriški vertikaliosios tiesės atžvilgiu (tiesa, paveikslėlio **E** penketai apversti). Apie paveikslėlio **D** penketus sakoma, kad jie simetriški taško (įsivaizduojamo mažiausio paveikslėlius apimančio stačiakampio įstrižainių susikirtimo taško) atžvilgiu.

M2. Ⓓ 8

? Perlaužę lazdelę pusiau, gauname 2 lazdeles. Todėl dabar Juozas turi 8 lazdeles. Renkamės atsakymą **D**.

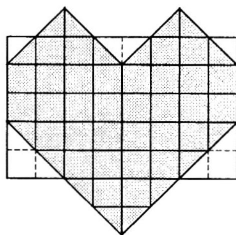
! Žodžiai „perlaužė“ ir „sulaužė“ kartais reiškia tą patį, todėl galėtų kilti mintis, kad Juozui dabar liko tik 6 (sveikos) lazdelės. Bet kadangi nekalbama, kad lazdelės turi būti vienodos, ir nesakoma, kad lazdelė sulūžo (ją Juozas perlaužė būtent pusiau, taigi greičiausiai sąmoningai), tai panašiau, kad reikia rinktis atsakymą **D**.

M3. Ⓓ 400 g

! Suskaičiavę gauname 32 kvadratėlius ir 16 puselių, t. y. 40 kvadratėlių. Renkamės atsakymą **D**.

!! Jau pirmas sprendimas yra visiškai teisingas, bet neįdomus: žymiai įdomiau skaičiuoti ne po vieną kvadratėlį. Matome, kad širdutė simetriška, todėl užtenka suskaičiuoti, kiek sveria jos kairė pusė, ir rezultatą padauginti iš 2.
Patogu skaičiuoti „stulpeliais“. Pirmas stulpelis turi 2 pilnus kvadratėlius ir 2 puseles, taigi iš viso 3 kvadratėlius. Antras stulpelis — $4+1=5$ kvadratėliai. Trečias stulpelis — $5+1=6$ kvadratėliai. Tiek pat jų turi ir ketvirtas stulpelis. Iš viso kairėje pusėje turime $3+5+6+6=20$ kvadratėlių, širdutėje yra $20\cdot 2=40$ kvadratėlių. Širdutė sveria $40\cdot 10=400$ g.

Galima ne skaičiuoti, o braižyti. Perkėlę kelis širdutės gabaliukus (žr. brėžinį), gauname stačiakampį 8×5. Todėl širdutė sveria $40 \times 10 = 400$ g.



M4. Ⓒ 6

? Atspėti čia sunku — reikia suvokti, kaip sudaryta lentelė. Iš pradžių surašome daug vienetų tokiu kampu: $\wedge$, o po to ji pildoma įrašant aukščiau esančių dviejų kaimynų sumą. Vadinasi, $X = 3 + 3$. Renkamės atsakymą **C**.

?? Galima patikrinti ir visą lentelę — visur taisyklės paisoma.

! Sudėtį lengva pakeisti atimtimi — galima sakyti, kad X rasime iš jo apatinio dešiniojo kaimyno 10 atėmę X-so dešinįjį kaimyną 4, t. y. $X = 10 - 4 = 6$.

M5. Ⓒ 6

? Pirma, kas šauna į galvą — tai atsakymas 3. Vis dėlto pasirinkę atsakymą **E** nukentėtume — geriau perrinkti visas galimybes. Susėsti į 3 vietas — tai tas pat, kas ir išsirikiuoti į trijų asmenų eilutę. Nesunku surašyti visas įmanomas eilutes: *tms*, *tsm*, *mts*, *mst*, *stm*, *smt*. Vadinasi, yra 6 skirtingos eilutės, ir renkamės atsakymą **C**.

! Nesunku išrašyti visas eilutes ir įsitikinti, kad daugiau jų nėra. Įsivaizduokime, kad vietas sunumeravome. Tėtė gali pasirinkti ir 1-ą, ir 2-ą, ir 3-ią vietas. Kai jis pasirenka 1-ą vietą, mama ir sūnus turi dvi vietas ir, susėdę bet kaip, gali dar ir pasikeisti vietomis. Turime dvi galimybes *tms* ir *tsm*. Dar po 2 galimybes gausime, jei tėtė užims 2-ą ar 3-ią vietą. Taigi iš viso bus 6 susėdimo variantai.

!! Įdomu, kad užtenka suskaičiuoti, keliais būdais galima pasodinti tėtę ir mamą (iš tikrųjų — trečios vietos sūnus pasirinkti nebegalės ir turės sėsti į vienintelę neužimtą). Skaičiuokime tai taip: sakykime, kad reikia atlikti du darbus — pasodinti tėtę, po to pasodinti mamą. Pirmą darbą galima atlikti 3 būdais. Po to, kai pirmas darbas jau atliktas (ir liko 2 vietos), reikia pasodinti mamą. Bet ją galima pasodinti tik 2 būdais, nes liko tik 2 vietos. Vadinasi, mamai kiekvienu atveju turime 2 būdus. Bet atvejų yra 3, taigi abu darbus galima atlikti $3 \times 2 = 6$ būdais. Sakoma, kad būdų skaičių nustatėme remdamiesi sandaugos taisykle.

M6. Ⓔ $18 - 6 : 3 = 16$

? Ir čia, matyt, spėti neverta — geriau prisiminti veiksmų eilę. Iš karto matome, kad lygybės **A**, **B**, **C**, **D** nepanašios į teisybę. Tikriname **E**: kadangi $6 : 3 = 2$, tai lygybė teisinga.

! Tikriname visas lygybes:

A $12 : (4 + 8) = 12 : 12 = 1$,

B $8 \cdot 2 + 3 = 16 + 3 = 19$,

C $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 6 + 20 = 26$,

D $(10 + 8) : 2 = 18 : 2 = 9$,

E $18 - 6 : 3 = 18 - 2 = 16$.

Taigi teisinga tik lygybė **E**.

!! Dešinės lygybių pusės sąlygoje surašytos visai neatsitiktinai — teisingos tokios lygybės:

$$12 : 4 + 8 = 11,$$

$$8 \cdot (2 + 3) = 40,$$

$$(2 \cdot 3 + 4) \cdot 5 = 50,$$

$$10 + 8 : 2 = 14.$$

Kitaip sakant, tai uždavinys, mokantis veiksmų tvarkos.

M7. Ⓔ 5

? Tikriname atsakymus **A**, **B**, **C**, **D**. Gauname, kad iš viso vaikų bus atitinkamai 32, 33, 34, 35. Nė vienas šių skaičių nesidalija iš 6, todėl tiek vaikų suskirstyti į vienodo dydžio grupes neįmanoma. O štai jeigu prisijungtų 5 vaikai, tai būtų 36 vaikai, o juos jau galima suskirstyti į 6 grupes po 6 vaikus.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi berniukų skaičius dalijasi iš 6, tai į jį galima nekreipti dėmesio. 18 mergaičių taip pat galima padalyti į 6 grupes. Vadinasi, lieka 1 vaikas, o kad papildomai galima būtų skirti bent po 1 vaiką į kitas grupes, reikia mažiausiai 5 vaikų.

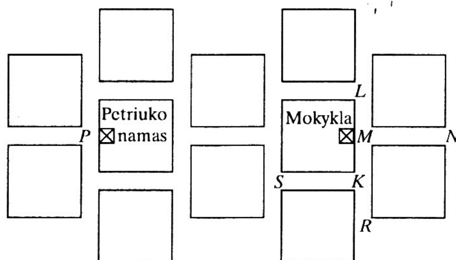
!! Dar įdomiau būtų, kad grupės būtų ne tik vienodo dydžio, bet kad jose būtų po vienodai berniukų ir po vienodai mergaičių. Tai pavyks tik tada, jeigu prie vaikų prisijungs 5 mergaitės: iš pradžių į grupes paskirstome po 2 berniukus ir po 3 mergaites. Kadangi liko viena mergaitė, ir ji pateks į kurią nors grupę, tai ir į kiekvieną iš kitų grupių turi patekti dar bent po mergaitę. Taigi mažiausiai turi prisijungti 5 mergaitės. Jei prisijungtų 5 mergaitės, į grupes būtų galima skirti po 2 berniukus ir 4 mergaites.

M8. Ⓔ 500 m

? Norisi tikėti, kad Petriukui verta laikytis visą laiką kuo arčiau mokyklos, todėl jo kelias būtų, pavyzdžiui, toks: žemyn 50 m, į dešinę 100 m, aukštyn 50 m, į dešinę 100 m, žemyn 50 m, į dešinę 100 m, aukštyn 50 m. Iš viso 500 m.
Renkamės atsakymą **E**.

?? Vien į dešinę Petriukui reikia nueiti 300 m. Bet iš pradžių jam reikia eiti vertikaliai bent 50 m, vėliau reikės vertikaliai sugrįžti, vadinasi, jo kelias — bent 400 m, ir atsakymai **A**, **B** ir **C** atkrinta. Atkrinta ir atsakymas **D**: kiek jis eis vertikaliai, tiek kartų turės grįžti, todėl trumpiausias kelias — apvalus šimtų skaičius.
Liko atsakymas **E**.

! Griežtai įrodysime, kad trumpiausias galimas kelias yra 500 m. Vieną tokį maršrutą jau nurodėme. Įrodysime, kad kiekvienas kitas maršrutas nėra trumpesnis.



Tašką, kur stovi Petriuko namas, pažymėkime raide P, mokyklos tašką — raide M, kaimyną už 100 m į dešinę — N, kaimyną už 50 m į apačią — K, kaimyną už 50 m į viršų — L, taško K kaimyną už 50 m į apačią — R.

Į mokyklą galima patekti tik per taškus K, L arba N. Kelias iki N ilgesnis negu 400, nes vien horizontaliai atstumas PN yra 400 m, o dar teks eiti vertikaliai. Vadinasi, trumpiausias kelias į M eina arba per L, arba per K. Abu atvejai simetriški, todėl sakykime, kad į M patekome iš K. Užtenka įrodyti, kad kelias iš P į K yra $\geqslant 450$ m. Tai visiškai aišku, jei į K iš P patenkame per R — jau vien kelias $PR \geqslant 400$ m (nes iš P į R reikia eiti į dešinę 300 m, o dar taškas R yra 100 m žemiau už P. O jeigu iš P į K patenkame per S, tai užtenka įrodyti, kad kelias $PS \geqslant 350$ m. Bet einant iš P į S į dešinę reikia nueiti 200 m, o vertikaliai — mažiausiai $3 \times 50 = 150$ (m).
Teisingas atsakymas **E**.

M9. Ⓒ 3 metai

? Tikriname atsakymus, o kadangi jie išrikiuoti, pradedame nuo vidurio — atsakymo **C**. Petriukui bus metai, vadinasi, Onutei 3 metais daugiau, t. y. 6 metai. Tai iš tikrųjų dvigubai daugiau.
Renkamės atsakymą **C**.

! Patikrinkime ir likusius atsakymus — o gal netyčia dar kuris nors atsakymas tinka? Kai (**A**) Petriukui bus 1 metai, tai Onutei bus 4 metai, o tai nėra dvigubai daugiau. Kai (**B**) Petriukui bus 2 metai, tai Onutei bus 5 metai, o tai nėra dvigubai daugiau. Kai (**D**) Petriukui bus 4 metai, tai Onutei bus 7 metai, o tai nėra dvigubai daugiau. Kai (**E**) Petriukui bus 10 metų, tai Onutei bus 13 metų, o tai nėra dvigubai daugiau.
Vadinasi, tinka tik atsakymas **C**.

!! Galima sudaryti lygtį. Sakykime, kad Petriukui bus x metų, kai Onutė bus dvigubai vyresnė. Onutei tada bus $3 + x$ metų. Turime lygtį $3 + x = 2x$, taigi $x = 3$.
Žinoma, galima spręsti ir nesudarant lygties. Kadangi Onutės ir Petriuko metų skirtumas nesikeičia ir visada lygus 3, tai dvigubų Petriuko metų ir Petriuko metų skirtumas (o tas skirtumas ir yra Petriuko metai) lygus 3. Vadinasi, Petriukui bus 3 metai.

M10. Ⓓ 3

? Labai neblogai būtų paprašyti sesutę įsirišti kaspiną dešinėje ir pasisukioti prieš veidrodį. O jeigu rimtai — ką čia atspėsi.

! Veidrodžio atvaizdas turi keistą savybę — jis sukeičia dešinę ir kairę pusę vietomis (netikite — eikite prie veidrodžio ir pakelkite kairę ranką). Vadinasi, mes matysime mergaitę, įsirišusią kaspiną arčiau kairės ausies. Tokie yra 2-as, 3-ias ir 4-tas paveikslėliai.
Taigi teisingas atsakymas **D**.

M11. Ⓔ 5

? Pradėkime spėlioti nuo vidurio. Jeigu buvo 8 kengūros, tai net duodant kuo mažiau saldainių — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 — išdalysime $(1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) = 4 \cdot 9 = 36$ saldainius. Kadangi tai žymiai daugiau už 20, tai tikrinkime mažiausią atsakymuose nurodytą kengūrų skaičių — atsakymą **E**. Duodami kuo mažiau, penkioms kengūroms išdalysime $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ saldainių; lieka 5 saldainiai, bet šeštai kengūrai jų nebeužtenka.
Renkamės atsakymą **E**.

! Griežtas sprendimas čia sunkokas — matematika nemėgsta tokių frazių, kaip „net duodant kuo mažiau“. Įrodyti reikia du dalykus: 1) kengūrų negalėjo būti daugiau kaip 5; 2) 5 kengūros būti galėjo. Beje, 2) punktą įrodyti paprasta: užtenka joms duoti 1, 2, 3, 4, 10 saldainių. O štai 1) punktą įrodyti žymiai sunkiau. Tarkime, kad buvo $\geqslant 6$ kengūros. Sunumeruokime jas gautų saldainių skaičiaus didėjimo tvarka. Tada 1-a kengūra gavo $\geqslant 1$ saldainių (pagal sąlygą). Antra kengūra gavo daugiau saldainių, todėl $\geqslant 2$. Trečia gavo $\geqslant 3$, ketvirta $\geqslant 4$, penkta $\geqslant 5$, šešta $\geqslant 6$. Todėl jau šešios kengūros (jų gal buvo ir daugiau) gavo ne mažiau kaip $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ saldainį. Prieštara, nes saldainių buvo tik 20.
Kadangi kengūrų negalėjo būti daugiau kaip 5, o 5 kengūros būti galėjo, tai atsakymas yra 5 kengūros, t. y. **E**.

!! Surašykime sprendimą formaliau. Sakykime, kad buvo n kengūrų, ir joms pavyko išdalyti saldainius taip, kad jokios dvi negavo vienodai saldainių. Sunumeruokime kengūras taip: kengūrai, kuri gavo mažiausiai saldainių, suteikime numerį 1, o jos saldainių skaičių pažymėkime x_1 (beje, gal ji turi 3 saldainius, o ne 1!); tai, kuri iš likusių kengūrų dabar turi mažiausiai saldainių, suteikime numerį 2, o jos saldainių skaičių pažymėkime x_2, ir t. t.
Iš sąlygos žinoma, kad pirma kengūra turi bent vieną saldainį ($x_1 \geqslant 1$). Antra kengūra turi daugiau saldainių negu pirma, todėl ji turi bent 2 saldainius ($x_2 \geqslant 2$) ir t. t. Bet saldainių yra iš viso 20, todėl $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 20$. Kita vertus, $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 2$ ir t. t., todėl $20 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant \geqslant 1 + 2 + \cdots + n$, $\frac{n(n+1)}{2} \leqslant 20, n(n+1) \leqslant 40$. Gautoji nelygybė yra teisinga, kai $n \leqslant 5$ ($n \in N$). Vadinasi, kengūrų galėjo būti ne daugiau kaip 5. Dar reikia įrodyti, kad 5 kengūros galėjo būti. Iš tikrųjų, užtenka sustatyti ratu 5 kengūras ir, pavyzdžiui, duoti joms atitinkamai 1, 2, 3, 4, 10 saldainių. (Beje, kengūrų sustatymas ratu įtakos atsakymui neturi.)

M12. (C) 50

? Tikrinkime nuo vidurio. Jeigu vagonėlių būtų 50, tai 34-tas nuo galo vagonėlis turėtų numerį $50 - 34 + 1 = 17$, o taip ir turėjo būti.
Renkamės atsakymą **C**.

! Tikrinkime kitus atsakymus. Jei vagonėlių 48 (atsakymas **A**), tai 34-tas nuo galo turėtų numerį $48 - 34 + 1 = 15$, — netinka. Jei vagonėlių 49 (atsakymas **B**), tai 34 nuo galo vagonėlis turėtų numerį $49 - 34 + 1 = 16$, — netinka. Netinka ir atsakymai **D** ir **E**. Vadinasi, tinka tik atsakymas **C**. „Kengūrinis“ atsakymas gautas.

!! Kita vertus — o gal tinka koks nors iš nenurodytų atsakymų? Griežtas (ir paprasčiausias!) sprendimas galėtų būti toks:
Prieš Betės ir Ketės vagonėlį yra 16 vagonėlių. Už jų vagonėlio yra 33 vagonėliai. Todėl iš viso yra $16 + 33 + 1 = 50$ vagonėlių.

M13. (E)

? Atspėti čia sunkoka. Galime pastebėti, kad jeigu iš kubelių sustatysime „raidę L“, tai atveju **A** paskutinis kubelis prilips prie antro nuo viršaus kubelio, atveju **B** — taip pat, atveju **C** — taip pat, atveju **D** — taip pat. O štai atveju **E** paskutinis kubelis prilipęs prie trečio nuo viršaus kubelio. Renkamės atsakymą **E**.

?? Gražus būdas nustatyti, kad kūnas **E** skiriasi nuo kitų, yra toks. Kūną **A** lengva perpjauti taip, kad gautume du vienodus kūnus . Tą patį nesunku padaryti su kūnu **B**, su kūnu **C**, su kūnu **D**. O štai kūno **E** padalyti taip nepavyksta.

! Vėl pastatykime „raidę L“. Atveju **A** prilipęs kubelis eina į užpakalį, atveju **B** — irgi, atveju **C** — irgi, atveju **D** — irgi. Vadinasi, visus tuos kūnus galima sutapdinti — ir tik tada galima teigti, kad jie nesiskiria. Pavyzdžiui, priklijuokime kubelį paveiksle **C** ne iš užpakalio, o iš priekio. Tada ir sprendimas ?, ir sprendimas **??** nieko neduoda (išskyrus „kengūrinį“ atsakymą). O matematinis atsakymas būtų toks: nuo sutapdinamų kūnų **A**, **B** ir **D** skiriasi tiek kūnas **C**, tiek ir kūnas **E**.

M14. (B) 3

? Sakykime, kad jie turėjo po 100 ženklų. Kai Adomas padovanojo Mariui 50 ženklų, tai pas Marių pasidarė 150 ženklų, o pas Adomą — 50 ženklų. Tai yra 3 kartus daugiau. Renkamės atsakymą **B**.

! Kyla abejonių, ar sprendimas ? teisingas — gal tikrai, pavyzdžiui, atsakymas priklauso nuo turėtų ženklų skaičiaus. Griežtas sprendimas galėtų būti toks.
Pusės Adomo kolekcijos ženklų skaičių pažymėkime x, tada Adomo (taigi ir Mariaus) kolekcijoje iki gimtadienio buvo $2x$ ženklų. Po gimtadienio Marius turi $2x + x = 3x$ ženklų, o Adomas $2x - x = x$ ženklų. Vadinasi, Marius dabar turi 3 kartus daugiau ženklų negu Adomas.
Teisingas atsakymas **B**.

M15. Ⓒ 3

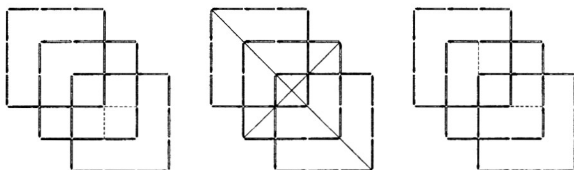
? Tikriname atsakymus nuo vidurio — atsakymo **C**. Kadangi yra 3 trikampiai, jie turi 9 viršūnes. Keturkampiams lieka 8 viršūnės, taigi ant stalo yra 2 keturkampiai. Renkamės atsakymą **C**.

! Tikrinkime kitus atsakymus. Jei būtų teisingas atsakymas **A**, tai vienas trikampis turėtų 3 viršūnes, o keturkampiams liktų 14 viršūnių. Bet 14 nesidalija iš 4, ir keturkampiai negali duoti 14 viršūnių. Panašiai negali būti 2 trikampiai — tada keturkampiams liktų $17 - 2 \cdot 3 = 11$ viršūnių. Negali būti 4 trikampiai — tada liktų $17 - 4 \cdot 3 = 5$ viršūnės. Negali būti ir 5 trikampiai — tada keturkampiams liktų $17 - 5 \cdot 3 = 2$ viršūnės.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas **C**.

!! Sakykime, kad ant stalo yra x trikampių. Tada jie turi $3x$ viršūnių, o keturkampiams lieka $17 - 3x$ viršūnių. Šis skaičius turi dalytis iš 4. Kadangi $17 - 3x = 16 - 4x + 1 + x$, tai $x + 1$ turi dalytis iš 4. Bet $x < 6$ (kitaip viršūnių bus per daug), todėl $x + 1 < 7$. Bet iš mažesnių už 7 natūraliųjų skaičių tik skaičius 4 dalijasi iš 4. Taigi $x + 1 = 4, x = 3$.

M16. Ⓐ 2

? Dabar kvadratų matome tris didžiuosius 3×3, du vidutinius 2×2 ir 3 mažuosius 1×1, t. y. aštuonis. Dedant vieną degtuką pavyksta gauti tik vieną naują kvadratėlį. Padėję 2 degtukus taip, kad apatinio kvadrato 3×3 centre susidarytų kvadratėlis 1×1, gausime jį ir dar du naujus kvadratėlius 1×1 (žr. kairįjį paveikslėlį). Kadangi prisideda 3 nauji kvadratėliai, tai renkamės atsakymą **A**.



! Griežtai kalbant, reikėtų įrodyti, kad vieno degtuko negana. Kadangi figūra simetriška tiek ilgosios „įstrižainės", tiek ir trumposios „įstrižainės" atžvilgiu, tai užtenka ištirti galimas degtuko padėtis, pavyzdžiui, kairiajame „ketvirtyje" (žr. vidurinį paveikslėlį). Matome, kad degtuką jame galima padėti tik horizontaliai ir tik 3 būdais. Dedant aukščiau, naujų kvadratų negauname, o dedant žemiau, kiekvienu iš atvejų gauname tik vieną naują kvadratėlį. Vadinasi, vieno degtuko neužtenka.
Įrodysime, kad sprendime **?** paminėtu būdu padėję 2 degtukus gausime lygiai 11 kvadratų. Iš tikrųjų, gauname 3 naujus kvadratėlius 1×1, o naujų kvadratėlių 2×2 ar 3×3 nebegauname.
Vadinasi, teisingas atsakymas **A**.

!! Du degtukus galima padėti įvairiai, ir nuo to priklauso kvadratų skaičius. Pavyzdžiui, jei vieną degtuką padėsime horizontaliai kairėje kuo aukščiau, o kitą — simetriškai dešinėje kuo žemiau, tai naujų kvadratų negausime. Nesunku įsitikinti, kad padėjus 2 degtukus galima gauti 1 naują, 2 naujus, 3 naujus (tai jau žinome) kvadratus. Beje, galima gauti du naujus kvadratėlius 1×1 ir vieną naują kvadratą 2×2 (žr. dešinįjį paveikslėlį).
O štai gauti 4 naujus kvadratus nepavyksta. Įrodyti tai galima kaip ir aukščiau — pirmam degtukui turime tris padėtis, o tada peržiūrime galimas antro degtuko padėtis.

M17. Ⓓ 6

? Prieš grįžtant pirmą kartą prie kairiojo (K) krepšelio, bus paimta po saldainį iš K, iš vidurinio (V), iš dešiniojo (D), vėl iš V. Vadinasi, per pirmą „ratą" bus paimta 1 saldainis iš K, 2 saldainiai iš V ir 1 saldainis iš D. Aišku (ir sąlygoje pasakyta), kad anksčiausiai 11 saldainių bus paimta iš V. Po bet kurio skaičiaus pilnų ratų iš krepšelių K ir D paimama dvigubai mažiau, nei iš krepšelio V, todėl kai krepšelis V ištuštės, iš kitų dviejų krepšelių bus paimta maždaug dvigubai mažiau. Vadinasi, galėtų tikti tik atsakymai **C** ir **D**. Kadangi atsakymo **D** skaičius didesnis, renkamės atsakymą **D**.

! Žinoma, geriausia čia ne spėlioti, o susidaryti lentelę, kurioje būtų nurodyta, kiek saldainių yra kiekviename krepšelyje po kiekvieno rato (ir pradinėje padėtyje):

K	V	D	
11	11	11	(pradinė padėtis)
10	9	10	(po pirmojo rato)
9	7	9	(po antrojo rato)
8	5	8	(po trečiojo rato)
7	3	7	(po ketvirtojo rato)
6	1	6	(po penktojo rato)

Dabar reikia sustoti ir būti atidžiam — galvoti ne apie visą ratą, o apie kiekvieną ėmimą. Šiuo momentu eilė imti iš K. Paėmę turime

5 1 6

Dabar eilė imti iš V — turime

5 0 6

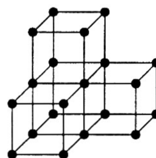
Štai čia ir yra tas momentas, kai V ištuštėjo. Daugiau saldainių liko krepšelyje D, ir būtent 6.
Teisingas atsakymas **D**.

M18. Ⓒ 20

! Iš pradžių parduotuvėje buvo $12 \cdot 10 = 120$ porų batų. Pirmieji trys šimtakojai nusipirko po 30 porų — kartu 90 porų. Du kiti pirko po 5 poras, taigi kartu nupirko 10 porų. Vadinasi, po šimtakojų apsilankymo parduotuvėje liko $120 - (90 + 10) = 20$ porų batų.
Teisingas atsakymas **C**.

M19. Ⓒ 20

? Nusipieškime ir nematomus pagaliukus ir rutuliukus.
Suskaičiavę gauname 20 rutuliukų.
Renkamės atsakymą **C**.



! Galima skaičiuoti ir žiūrint į sąlygos paveikslėlį. Kiekvienas kubas turi 8 rutuliukus. Imkime 3 kubus, kurie matomi paveikslėlyje. Kiekvieno jų nematome vieno apatinio rutuliuko — kairiojo užpakalinio. Matome 16 rutuliukų, taigi tik trys kubai turi 19 rutuliukų. Ketvirtojo kubo viršutinės vienos sienos visi rutuliukai bendri su viršutinio kubo apatinės sienos rutuliukais, jo dešiniosios sienos rutuliukai bendri su dešiniojo kubo kairiosios sienos rutuliukais, o priekinės sienos rutuliukai bendri su priešakinio kubo užpakalinės sienos rutuliukais. Išvardytos trys sienos apima visus rutuliukus, išskyrus apatinį kairįjį užpakalinį. Taigi ketvirtas kubas prideda į konstrukciją tik vieną rutuliuką. Gauname $19 + 1 = 20$ rutuliukų.
Teisingas atsakymas **C**.

M20. Ⓐ 10

! Paprasčiausia pradėti nuo pirmojo skaitmens — jis gali būti 4, 3, 2, 1. Jei pirmas skaitmuo 4, tai abu kiti skaitmenys — nuliai (1 skaičius). Jei pirmas skaitmuo 3, tai antro ir trečio suma — 1, todėl arba antras skaitmuo 0, o trečias 1, arba atvirkščiai (2 skaičiai). Jei pirmas skaitmuo 2, tai antro ir trečio suma lygi 2, ir turime tris galimybes: $0 + 2$, $1 + 1$, $2 + 0$ (3 skaičiai). Pagaliau jei pirmas skaitmuo 1, tai antro ir trečio suma lygi 3, ir turime keturias galimybes: $0 + 3$, $1 + 2$, $2 + 1$, $3 + 0$ (4 skaičiai). Taigi iš viso yra $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ tokių skaičių.
Teisingas atsakymas **A**.

M21. Ⓐ 600 cm

! Kadangi kvadrato *A* perimetras 720 cm, tai jo kraštinė 180 cm, o didžiojo kvadrato kraštinė 360 cm. Todėl stačiakampio *E* ilgesnioji kraštinė yra $360 - 180 = 180$ (cm), o trumpesnioji — trečdalis didžiojo kvadrato kraštinės: $360 : 3 = 120$ (cm). Vadinasi, stačiakampio *E* perimetras lygus $(180 + 120) \cdot 2 = 600$ (cm).
Teisingas atsakymas **A**.

M22. Ⓒ 3 h

! Zita uždega 4 žvakes — dvi naujas, kurios degs 3 valandas, ir dvi trumpesnes, kurios degs trumpiau. Taigi naujosios žvakės užges po 3 valandų.
Teisingas atsakymas **C**.

M23. Ⓑ 5

? Spėkime nuo vidurio — atsakymo **C**. Jei Česlovas turėtų 10 litų, tai Balys turėtų 20 litų, Algis — 30 litų, o visi jie turėtų 60 litų — per daug. Imkime atsakymą **B**. Tada Česlovas turėtų 5 litus, Balys — 15 litų, Algis — 20 litų, o visi kartu, kaip ir reikia, turėtų 40 litų.
Renkamės atsakymą **B**.

?? Iki „kengūrinio“ sprendimo reikia dar patikrinti atsakymą **A** (atsakymai **D** ir **E** duos dar daugiau nei 40 litų). Tada Česlovas turėtų 4 litus, Balys — 14 litų, Algis — 18 litų, o visi kartu jie turėtų 36 litus.
Vadinasi, iš duotųjų atsakymų tinka tik atsakymas **B**.

! Išspręskime uždavinį nespėliodami. Kadangi Algis turi tiek pat pinigų, kiek Balys ir Česlovas kartu, tai šiedu turi $40 : 2 = 20$ litų. Atidėkime į šalį Balio 10 litų — tada jie turės pinigų po lygiai, o kartu turės 10 litų. Vadinasi, Česlovas turėjo (ir turi) 5 litus.
Šis vienintelis galimas sprendinys tikrai tenkina visas uždavinio sąlygas.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Tą patį sprendimą dažnas mieliau užrašytų lygtimis. Kiekvieno turimą pinigų sumą pažymėję pirmąja vardo raide, turime: $A = B + C$, $A + B + C = 40$, $B = C + 10$. Atėmę iš antros lygties pirmą, gauname $B + C = 20$, o iš šios atėmę trečiąją lygtį, — kad $C = 5$.
Žinoma, užtenka ir vieno nežinomojo. Jei Česlovas turėjo x litų, tai Balys $x + 10$ litų, o Algis $x + x + 10 = 2x + 10$ litų. Kadangi visi trys turėjo 40 litų, tai $2x + 10 + x + x + 10 = 40$, $4x = 20$, $x = 5$.

M24. Ⓔ Kitas atsakymas

? Turint gerą vaizduotę, nesunku atspėti, kad viršuje bus 2 akutės. Žinoma, būtų gerai po ranka turėti kauliuką ir pasitikrinti (beje, tam puikiai tinka ir stačiakampio gretasienio formos trintukas ar dėžutė). Visuomet netikėta, kai prisieina rinktis „nekonkretų“ atsakymą **E**.

! Po pirmo vertimo apatinėje sienoje bus 2 akutės, o 1 akutė taip ir liks priekinėje sienoje. Po antro vertimo 1 akutė atsidurs viršuje, o 2 akutės atsidurs priekinėje sienoje. Vadinasi, po dviejų vertimų „į dešinę, po to į viršų“ priekinė siena atsiduria viršuje. Dabar, po 2 vertimų, priekinėje sienoje yra 2 akutės. Po 2 vertimų, t. y. po visų 4 vertimų, jos atsidurs viršuje.
Teisingas atsakymas **E**, nes atsakymo „2 akutės“ tarp išvardytų nėra.

BIČIULIS (V ir VI klasės)

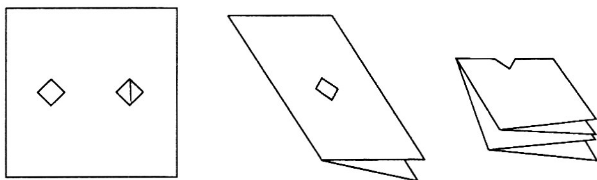
B1. Ⓑ 0

? Čia jau nepaspėliosi — reikia skaičiuoti.

! $2 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 = 0$.
Teisingas atsakymas **B**.

B2. Ⓒ

? Matome, kad iškarpa nėra lapo krašte, todėl atsakymai **D** ir **E** atkrinta. Aišku, kad skylutė nėra lapo viduryje, todėl atkrinta atsakymas **A**. Pagaliau, skylutės kraštinė nėra lygiagreti lapo kraštui, todėl atkrinta ir atsakymas **B**.
Renkamės atsakymą **C**.



! Pabandykime sulenkti lapą **C** (jis pasuktas pavaizduotas kairėje), kad gautume kažką panašaus į sąlygos paveikslėlyje pavaizduotą sulankstytą lapą. Po pirmo lenkimo per vertikalią ašį gauname viduryje pavaizduotą lapą, po antro lenkimo per horizontalią ašį — dešinėje pavaizduotą lapą. Jis pakankamai panašus į sąlygoje pavaizduotą (beje, sąlygos paveikslėlyje neišlaikyti nelankstyto ir sulankstyto lapo matmenys).
Žinoma, konkurso metu galima pasinaudoti sąsiuvinio lapu, — jį sulankstyti ir padaryti skylę.

B3. Ⓑ 8 min

? Pradėkime nuo atsakymo **C**. Jeigu per parą laikrodis pavėluoja 9 minutes, tai per 8 valandas — 3 minutes (arba 180 sekundžių), per 2 valandas — 45 sekundes, per 1 valandą — $22\frac{1}{2}$ sekundės. Tai per daug, ir tikriname mažesnį atsakymą **B**. Jei per 24 h laikrodis pavėluoja 8 minutes, tai per 3 h — 1 minutę, o per 1 h — 20 sekundžių.
Renkamės atsakymą **B**.

! Nesunku įrodyti, kad atsakymas **B** — vienintelis galimas. Kai laikrodis per parą pavėluoja 8 minutes, tai per valandą jis vėluoja 20 sekundžių. Aišku, kad jei per parą jis vėluos daugiau, tai per valandą jis vėluos daugiau kaip 20 sekundžių, o jei mažiau — tai mažiau.

!! Vis dėlto paprasčiausia uždavinį spręsti įprastiniu būdu.
Per 3 valandas laikrodis pavėluoja 1 minutę, todėl per 24 valandas pavėluos 8 kartus daugiau — 8 minutes.
Teisingas atsakymas **B**.

B4. Ⓓ $\frac{1}{12}$

? Iš karto matome, kad užtušuota apie pusė kvadratėlio, t. y. apie $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ ploto.
Renkamės atsakymą **D**.

! Įsitikinti, kad užtušuota lygiai pusė kvadratėlio, nesunku: juk kvadratėlis padalytas į du stačiakampius, kiekvienas stačiakampis įstrižaine padalytas į du lygius trikampius, o vienas iš tų trikampių užtušuotas. Taigi užtušuota pusė kiekvieno stačiakampio ploto, taigi ir pusė kvadratėlio ploto.

Kvadratėlis sudaro $\frac{1}{6}$ figūros ploto, taigi užtušuota $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ jos ploto.
Teisingas atsakymas **D**.

B5. Ⓔ 72

? Spėti pradėkime nuo vidurio. Jei keleivių yra 56, tai laisvų vietų yra 28, o tada lėktuve būtų 84 vietos. Kadangi tai yra gerokai per mažai, tikriname atsakymą **E**. Jei keleivių yra 72, tai laisvų vietų 36, ir iš viso yra 108 vietos keleiviams.
Renkamės atsakymą **E**.

! Aišku, kad atsakymas **E** yra vienintelis ne tik „Kengūros“ konkurso prasme, bet ir iš viso: juk jeigu keleivių būtų mažiau, tai ir laisvų vietų mažiau, taigi ir iš viso vietų būtų per mažai.

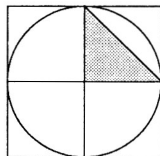
!! Kadangi 2 keleiviams tenka 3 vietos, tai 108 vietos tenka 36 kartus didesniam keleivių skaičiui, t. y. 72 keleiviams.
Galima sudaryti ir lygtį (nors tokiam uždaviniui — per daug garbės). Jei lėktuve keleivių yra x, tai laisvų vietų $\frac{x}{2}$, iš viso vietų $\frac{3x}{2} = 108$, $\frac{x}{2} = 36$, $x = 72$.

B6. Ⓒ 12

! Kadangi šeimoje 6 broliai, tai $B = 6$. Kadangi šeimoje 3 seserys, tai Danutė turi $S = 2$ seseris. Taigi $S \cdot B = 2 \cdot 6 = 12$.
Teisingas atsakymas **C**.

B7. Ⓔ

! Nesunku suskaičiuoti, kiek kiekvienoje figūroje užtušuota kvadratėlių ir skritulio ketvirtadalių:
A 2 ir 2, **B** 3 ir 0, **C** 2 ir 2, **D** 2 ir 2, **E** $2\frac{1}{2}$ ir 2.
Plotai **A**, **C** ir **D** lygūs ir mažesni už **E**, taigi liko palyginti **B** ir **E**. Bet **B** žymiai mažesnis: $\frac{1}{2}$ kvadratėlio tikrai mažiau už 2 skritulio ketvirtadalius (ir net už vieną skritulio ketvirtadalį, žr. paveikslėlį).
Teisingas atsakymas **E**.



B8. Ⓓ 84

? Kadangi dvigubinome 4 kartus, tai rezultatas būtinai turi dalytis iš $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Atsakymo **D** skaičius 84 dalijasi tik iš 4.
Renkamės atsakymą **D**.

! Visi kiti skaičiai dalijasi iš 16: $80 = 4 \cdot 20, 1200 = 30 \cdot 40, 48 = 6 \cdot 8, 880 = 8 \cdot 110$. Vadinasi, galutiniu rezultatu negali būti tik **D**.
Teisingas atsakymas **D**.

B9. Ⓒ 2641

! Matome, kad pirmame paveikslėlyje apie 1 apibrėžtos dvi kreivės, o apie 4 — tik viena. Antrame paveikslėlyje apie 1 apibrėžtos trys kreivės, apie 2 — dvi, apie 3 — viena. Matome, kad apie skaičių apibrėžtų kreivių kiekis lemia jo vyresniškumą. Kadangi trečiame paveikslėlyje apie 2 apibrėžtos keturios kreivės, apie 4 — dvi kreivės, apie 6 — trys kreivės, apie 2 — keturios kreivės, tai paveikslėlis išreiškia skaičių 2641.
Teisingas atsakymas **C**.

B10. Žr. uždavinio M16 sprendimą.

B11. Ⓓ Po 12 min

? Kadangi vaikinams kertant starto liniją kiekvienas bus nubėgęs sveikąjį ratų skaičių, tai minučių skaičius turi dalytis ir iš 3, ir iš 4. Toks skaičius yra tik atsakyme **D**.
Renkamės atsakymą **D**.

! Jau sakėme, kad minučių skaičius turi būti bendrasis 3 ir 4 kartotinis, o pirmą kartą jie kartu kirs starto liniją, kai minučių skaičius bus mažiausias bendrasis kartotinis, t. y. 12.
Teisingas atsakymas **D**.

B12. Ⓐ 1072

? Kadangi visų monetų Edvardas turi po lygiai, tai jas galima sudėlioti į krūveles, kurių kiekvienoje bus 1, 5 ir 10 eurų moneta, t. y. 16 eurų. Vadinasi, jo turima suma turi dalytis iš 16. Bet **B** ir **E** nesidalija iš 2, **D** nesidalija iš 4, **C** nesidalija iš 8 (nes $900 = 9 \cdot 100$ nesidalija iš 8).
Renkamės atsakymą **A**.

?? Skaičius $1072 = 2 \cdot 536 = 2^2 \cdot 268 = 2^3 \cdot 134 = 2^4 \cdot 67$ dalijasi iš 16, todėl „kengūrinis" atsakymas **A** tinka.

! Edvardas turi $201 : 3 = 67$ vieno euro monetas, 67 penkių eurų monetas, o kadangi dešimties eurų monetų jis taip pat turi trečdalį, tai jis turi 67 dešimties eurų monetas. Iš viso Edvardas turi
$67 \cdot 1 + 67 \cdot 5 + 67 \cdot 10 = 67 \cdot 16 = 1072$ eurus.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Kadangi skirtingos vertės monetų Edvardas turi po vienodą skaičių, tai vienos monetos vidutinė vertė yra $(10 + 5 + 1) : 3 = 16/3$. Taigi Edvardas turi $201 \cdot 16/3 = 67 \cdot 16 = 1072$ eurus.

B13. Ⓒ 106

? Kadangi įveiktų centimetrų skaičius baigiasi skaitmeniu 4, tai pritrūkusių centimetrų skaičius baigiasi 6. Bet iš **C** ir **E** pasirinkti atsakymą sunku.

! Kai Greitutis įveikė 9641 m, jam liko 359 m = 3590 dm. Kai jis įveikė 3456 dm, jam liko 134 dm = = 1340 cm. Kai jis įveikė 1234 cm, jam iki finišo linijos pristigo 106 centimetrų.
Teisingas atsakymas **C**.

B14. Ⓒ 66

? Matome, kad sekančio vagono numeris „truputį" mažesnis už dvigubą ankstesnį. Kadangi $34 \cdot 2 = 68$, tai renkamės atsakymą **C**.

! Galima suformuluoti ir griežtą taisyklę: sekančio vagono numerį gauname padvigubinę ankstesnio numerį ir atėmę 2. Todėl paskutinio vagono numeris yra $2 \cdot 34 - 2 = 66$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima pastebėti ir kitą taisyklę — skirtumai tarp vagonų numerių dvigubėja: $2, 4, 8, 16, \ldots$. Vadinasi, sekantis skirtumas lygus 32, ir pridėję jį prie 34 gauname 66.
Taip yra ne atsitiktinai — pagal abi taisykles sudarytos sekos sutampa. Iš tikrųjų, antra taisyklė reiškia, kad

$$a_2 - a_1 = 2,$$
$$a_3 - a_2 = 4,$$
$$a_4 - a_3 = 8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}.$$

Sudėję visas šias lygybes, gauname $a_n - a_1 = 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} - 2 = 4 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 8 + 8 + 16 + \dots + 2^{n-1} - 2 = \dots = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2 = 2^n - 2$, t. y. $a_n = a_1 + 2^n - 2$, arba $a_n = 2^n + 2$ (nes $a_1 = 4$).
Bet tada

$$a_{n+1} = 2^{n+1} + 2,$$

ir $a_{n+1} = 2(2^n + 1) = 2(2^n + 2) - 2 = 2a_n - 2$, t. y. $a_{n+1} = 2a_n - 2$. Tai ir reiškia pirmąją taisyklę: sekantį sekos narį gauname padvigubinę ankstesnįjį ir atėmę 2.

B15. Ⓑ 8

? Čia galima tikrinti atsakymus. Pradedame nuo **C**. Jeigu raudonasis slibinas turi 12 galvų, tai žaliasis turi 18 galvų. Jeigu dabar raudonasis slibinas turėtų 6 galvomis daugiau už žaliąjį, tai jie kartu turėtų $18 + 24 = 42$ galvas — per daug.
Tikriname **B**. Jeigu raudonasis slibinas turi 8 galvas, tai žaliasis turi 14 galvų. Turėdamas 6 galvomis daugiau už žaliąjį, jis turėtų 20 galvų, o su žaliuoju kartu jie turėtų 34 galvas.
Renkamės atsakymą **B**.

! Žinoma, spręsti paprasčiau nei spėti. Sakykime, kad raudonasis slibinas turi x galvų. Tada žaliasis turi $x + 6$ galvas. Turėdamas 6 galvomis daugiau už žaliąjį, jis turėtų $x + 12$ galvų, o kartu su pastaruoju $x + 12 + x + 6 = 34$ galvas. Iš čia $x = 8$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Kiek paprasčiau pasižymėti x žaliojo slibino galvų skaičių. Tada $x + 6 + x = 34$, ir $x = 14$. Kadangi raudonasis slibinas turi 6 galvomis mažiau, tai jis turi 8 galvas.
Žinoma, galima šį sprendimą surašyti ir be x. Jeigu raudonasis slibinas turėtų tiek pat galvų kiek ir žaliasis, tai jie kartu turėtų $34 - 6 = 28$ galvas. Todėl žaliasis slibinas turi $28 : 2 = 14$ galvų. Raudonasis slibinas turi 6 galvomis mažiau, t. y. 8 galvas.

B16. Ⓓ 80 m

? Pradėkime spėti nuo **C** — sakykime, kad antrojo sklypo ilgis yra 60 m. Kadangi jo plotas $1600\,\mathrm{m}^2$, tai jo plotis $\frac{1600}{60} = \frac{80}{3}$ (m). Tada pirmojo sklypo plotis $\frac{160}{3}$ m, o plotas $80 \cdot \frac{160}{3}$ — per didelis.
Tikrinkime atsakymą **B**. Jei antrojo sklypo ilgis yra 40 m, tai plotis $1600 : 40 = 40$ (m). Tada pirmojo sklypo plotis 80 m, o plotas $80 \cdot 80$ — dar didesnis.
Eikime į kitą pusę ir tikrinkime atsakymą **D**. Jei antrojo sklypo ilgis yra 80 m, tai plotis $1600 : 80 = 20$ (m). Tada pirmojo sklypo plotis 40 m, o plotas — kaip tik $40 \cdot 80 = 3200$ (m^2).
Renkamės atsakymą **D**.

! Žinoma, ir vėl paprasčiau spręsti. Pirmojo sklypo plotis yra $3200 : 80 = 40$ (m). Antrojo sklypo plotas lygus $1600\,\mathrm{m}^2$, plotis 20 m, todėl jo ilgis lygus $1600 : 20 = 80$ (m).
Teisingas atsakymas **D**.

B17. Ⓒ 24 min

! Atlikusi matematikos namų darbą per $60 \cdot \frac{1}{3} = 20$ minučių, kitus darbus Daiva dirbo $60 - 20 = 40$ minučių. Atlikus geografiją per $40 \cdot \frac{2}{5} = 16$ minučių, kitiems dalykams jai liko $40 - 16 = 24$ minutės.
Teisingas atsakymas **C**.

B18. Ⓓ 12

? Prieš 3 metus Ulai buvo daugiau nei $24 : 4 = 6$ metai, taigi dabar jai daugiau nei devyneri. Bandome atsakymą **D**. Jeigu Ulai dabar 12 metų, tai prieš 3 metus jai buvo 9 metai, trynukams 5 metai, o jų amžių suma tikrai buvo $3 \cdot 5 + 9 = 24$.
Renkamės atsakymą **D**.

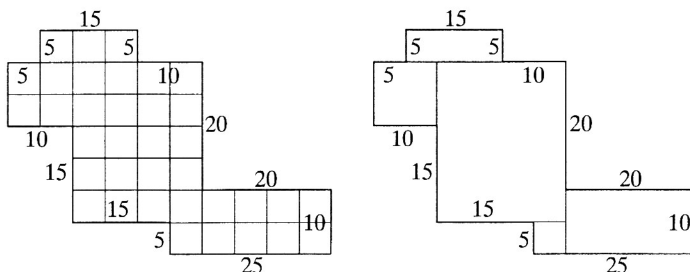
! Sakykime, kad Ulai dabar x metų, tada kiekvienam iš trynukų $x-4$ metai. Prieš trejus metus jų amžių suma buvo $3(x-7)+x-3=24$, $4x=48$, $x=12$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Galima apsieiti ir be lygties. Prieš trejus metus viso ketvertuko metų suma buvo 24. Jeigu Ula būtų buvusi 4 metais jaunesnė, tai visi keturi vaikai būtų vieno amžiaus, o jų metų suma būtų 20. Vadinasi, trynukams prieš trejus metus buvo $20:4=5$ metai, dabar jiems 8 metai, o Ulai $8+4=12$ metų.
Žinoma, galima kalbėti ir apie dabartį. Jeigu prieš 3 metus vaikų amžių suma buvo 24 metai, tai dabar ji padidėjo $4\cdot 3=12$ metų ir lygi $24+12=36$ metams. Ir jeigu įsivaizduotume, kad trynukai 4 metais vyresni, tai visiems keturiems jiems būtų $36+3\cdot 4=48$ metai, o Ulai yra $48:4=12$ metų.

B19. Ⓔ 900

! Kadangi visi matmenys dalijasi iš 5, tai patogu sudalyti sklypą į kvadratus 5×5. Tokių kvadratų yra 36, o kiekvieno sklypo plotas $25\,\mathrm{m}^2$. Vadinasi, sodo plotas lygus $25\times 36=900\,(\mathrm{m}^2)$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Žinoma, galima sklypą dalyti ir į mažiau dalių, pavyzdžiui, iškirpti didžiausią stačiakampį ir pratęsti dvi jo kraštines:



Gauname 5 stačiakampius: 15×5, 10×10, 20×25, 20×10, 5×5. Tų stačiakampių plotų suma lygi $20\cdot 5+20\cdot 25+30\cdot 10=20\cdot 30+30\cdot 10=30\cdot 30=900$.

B20. Ⓑ 40

! Domo uždarbį pažymėkime x, tada Alius uždirbo $4x$, o Benas $2x$. Sudarome lygtį: $4x+2x+x=$ $=280$, $x=40$.
Teisingas atsakymas **B**.
Žinoma, niekas nepasikeis, jei viską skaičiuosime Domo uždarbiais, o ne x-ais: Alius gavo 4 tokius uždarbius, Benas — 2 tokius uždarbius. Visi trys kartu jie gavo 7 Domo uždarbius. Vadinasi, Domo uždarbis yra $280:7=40$ litų.
Apskritai, jau ne kartą įsitikinome: jeigu sudaryta lygtis yra pirmojo laipsnio, tai galima apsieiti ir be x.

B21. Ⓒ 3 cm

? Pradedame tikrinti nuo atsakymo **C**. Tada tarpai tarp viršutinių lazdelių lygūs $14-2\cdot 3=8$ (cm). Keturios lazdelės po 14 cm ir trys tarpai po 8 cm kaip tik sudaro 80 cm.
Renkamės atsakymą **C**.

! Nors spėjant mums ir pasisekė, vargu ir čia ar verta spėti — faktiškai viską ir taip jau mes suskaičiavome. Kadangi viršutinių 4 lazdelių ilgių ir 3 tarpų suma lygi 80 cm, tai 3 tarpams lieka $80-4\cdot 14=24$ (cm). Vadinasi, tarpo ilgis yra $24:3=8$ (cm), ir dviem klaustuku pažymėtoms dalims lieka $14-8=6$ (cm). Vadinasi, ieškomosios dalies ilgis 3 cm.

B22. Ⓑ 34

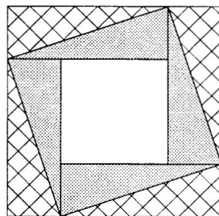
! Sakykime, kad 8-ta kabina yra aukščiausioje padėtyje, o 25-ta žemiausioje. Tada į vieną pusę (tarkime, į dešinę) tarp jų yra 16 kabinų — nuo 9-tos iki 24-tos, ir tiek pat į kairę pusę. Iš viso kabinų yra $2 + 2 \cdot 16 = 34$.
Teisingas atsakymas **B**.

B23. Ⓒ 14

! Visiems mokiniams per valandą reikia $0{,}7 \cdot 34$ kilogramų deguonies. Vadinasi, bukų reikia $0{,}7 \cdot 34 : 1{,}7 = 7 \cdot 34 : 17 = 14$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Žinoma, visa sprendimo gudrybė — nepradėti per anksti dauginti ar dalyti. Skaičiuoti galima ir kiek kitaip. 7 bukai išskiria $7 \cdot 1{,}7 = 0{,}7 \cdot 17$ kilogramų deguonies, t. y. aprūpina 17 mokinių. Vadinasi, 34 mokiniams reikia 14 bukų.

B24. Ⓒ 10



! Pasvirusiojo kvadrato plotą sudaro mažojo kvadrato plotas plius 4 trikampių plotas. Kadangi trikampio plotas sudaro pusę atitinkamo stačiakampio ploto, tai trikampių plotas sudaro pusę „žiedo" tarp kvadratų ploto. Žiedo plotas lygus $16 - 4 = 12$, todėl keturių trikampių plotas lygus 6. Vadinasi, pasvirusiojo kvadrato plotas lygus $4 + 6$, t. y. 10.
Žinoma, tą patį rezultatą gautume atėmę iš didžiojo kvadrato ploto 4 trikampių plotą: $16 - 6 = 10$.
Teisingas atsakymas **C**.

B25. Ⓔ 96

! Kad ir kaip suklijuotume 6 kauliukus, bokšto šoninio paviršiaus taškų suma bus ta pati: $6 \cdot 2 \cdot 7 = 84$. Visų bokšto paviršiuje esančių taškų suma bus didžiausia, kai apatinėje ir viršutinėje sienoje bus šešetai (taip padaryti niekas netrukdo). Taigi didžiausia taškų suma yra $84 + 2 \cdot 6 = 96$.
Teisingas atsakymas **E**.

B26. Ⓓ Didesnė už 21

? Kadangi trejetu prasideda tik sandaugos 9×4 ir 8×4, tai bandome vietoj žvaigždutės kairėje rašyti 9. Bet $9 \times 45 = 405$ prasideda ketvertu, todėl imame 8. Dabar jau $45 \times 83 = 3735$, o naujųjų skaitmenų suma $8 + 7 + 3 + 5 = 23$.
Renkamės atsakymą **D**.

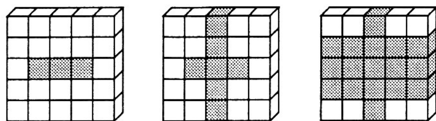
! Kadangi $3000 : 45 = 600 : 9 = 200 : 3 > 66$, $3999 : 45 < 400 : 45 = 800 : 9 < 90$, tai kairės pusės antras dauginamasis yra tarp 66 ir 90, todėl vietoj žvaigždutės kairėje lygybės pusėje gali stovėti skaitmuo 7 (štai kur spėjimo **?** neapsižiūrėjimas — pamesta galimybė 7) arba 8.
Jei tai skaitmuo 7, tai turime $45 \cdot 73 = 3285$, o jei tai skaitmuo 8, tai turime $45 \cdot 83 = 3735$. Pirmu atveju kalbamoji suma yra $7 + 2 + 8 + 5 = 22$, o antru — $8 + 7 + 3 + 5 = 23$. Kiekvienu iš atvejų netinka nei vienas iš atsakymų **A**, **B**, **E**, bet tinka atsakymas **D**.
Teisingas atsakymas **D**.
Matome, kad nors spėjimas **?** buvo nepakankamai pagrįstas, greitai gavome teisingą „kengūrinį" atsakymą. Vis dėlto, jei būtų duoti atsakymai „**D** didesnė už 22" ir „**E** kitas atsakymas", tai spėjime **?** mes pasirinktume neteisingą atsakymą **D**, o griežtas sprendimas **!** atvestų prie teisingo atsakymo **E**.

B27. Ⓐ 88

? Pjaudami pirmą skylę, išmetame 15 kubelių. Pjaudami antrą skylę vėl išmestume 15 kubelių, bet 3 kubeliai iš jų jau išpjauti (bendri abiem skylėms), taigi išmetame 27 kubelius. Pjaunant trečią skylę daugų daugiausiai bus 3 bendri kubeliai su pirma skyle ir 3 bendri su antra skyle, taigi iš viso ne daugiau kaip 6 jau išpjauti. Kitaip sakant, pjaudami trečią skylę išpjausime dar mažiausiai 9 kubelius, t. y. iš viso mažiausiai 36 kubelius ir liks daugų daugiausiai 89 kubeliai.

Kita vertus, pjaudami trečią skylę garantuotai ten aptiksime jau išpjautus 3 kubelius (pavyzdžiui, bendrus su pirma skyle), taigi tikrai išpjausime ne daugiau kaip 12 naujų kubelių, ir po trijų skylių pjovimo bus išmesta tikrai ne daugiau kaip $27 + 12 = 39$ kubeliai, o liks tikrai ne mažiau kaip 86 kubeliai.
Kadangi tarp 86 ir 89 iš atsakymų papuola tik skaičius 88, tai „kengūrinis“ atsakymas gautas.
Renkamės atsakymą **A**.
Pastaba. Mūsų laimei, radome bent tikslų „kengūrinį“ atsakymą. O dabar įsivaizduokime, kad vietoj atsakymo „**E** 85“ parašyta: „**E** kitas atsakymas“. Tada po mūsų samprotavimų **?** negalėtume niekuo būti tikri — jeigu tikslus išpjautų kubelių skaičius yra 88, tai reikėtų rinktis atsakymą **A**, o jeigu tikslus išpjautų kubelių skaičius yra 87, tai reikėtų rinktis atsakymą **E**.

! Sprendžiant tokius uždavinius svarbiausia susidaryti tam tikrą sistemą, kad skaičiuodami kubelius neapsiriktume.
Viena iš tokių sistemų — skaičiuoti sluoksniais, kiek kiekviename iš jų trūksta kubelių. Visiškai aišku, kad ir priekiniame, ir užpakaliniame sluoksnyje trūksta 3 kubelių (žr. pirmą paveikslėlį). Iš trijų tarp jų esančių sluoksnių antrasis ir ketvirtasis atrodo taip pat (žr. antrą paveikslėlį), o trečiasis nuo jų skiriasi (žr. trečią paveikslėlį).



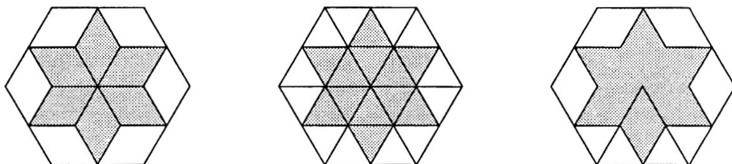
Antrajame (ir ketvirtajame) sluoksnyje trūksta 7 kubelių, trečiajame — 17 kubelių. Vadinasi, iš viso išpjauti $2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 17 = 37$ kubeliai, ir liko $125 - 37 = 88$ kubeliai.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Kita sistema būtų skaičiuoti, kiek kubelių išpjaunama pjaunant kiekvieną skylę. Išpjovus skylę iš viršaus žemyn, trūktų $5 \times 3 = 15$ kubelių. (Jeigu pjaunant kitas skyles, pavyzdžiui, lygiagrečiai pirmajai išpjauti kubeliai nesutaptų, tai išpjautume $3 \times 15 = 45$ kubelius, ir atsakymas būtų 80 — atsakymas **B** įtrauktas būtent norint nubausti už tokią klaidą.) Dabar pjaukime horizontalią skylę. Ji taip pat iš pradinio kubo išpjautų 15 kubelių, bet 3 kubeliai abiem skylėms bendri, taigi po dviejų pjūvių jau išpjauta $15 + 15 - 3 = 27$ kubeliai.
Liko išpjauti šoninę skylę. Ji išpjauna kubelius tik iš trečiojo (žiūrint iš priekio) sluoksnio (žr. antrą paveikslėlį). Iš jo trečia skylė išpjautų visus trijų eilių kubelius, bet dar neišpjautų kubelių jose bus tik 10 (5 jau išpjauti).
Taigi iš viso padarę skyles išpjauname $27 + 10 = 37$ kubelius, ir kube lieka 88 kubeliai.

!!! Pagaliau paminėsime formalų matematinį sprendimą, kuris remiasi vadinamąja priskirčių ir išskirčių formule (arba, tiksliau, samprotavimais, kuriais remiantis įrodoma ta formulė, gerai žinoma kombinatorikoje ir tikimybių teorijoje — atskiras jos atvejis yra dviejų sutaikomų įvykių sumos tikimybės formulė).
Aišku, kad bet kuris pjūvis iškerta 15 kubelių. Aišku, kad bet kurie 2 pjūviai turi 3 bendrus kubelius. Taip pat aišku, kad yra lygiai 1 kubelis, kuris priklauso visiems 3 pjūviams — tai centrinis kubelis (kad jį išpjauna kiekvienas pjūvis — akivaizdu, o vienintelis jis todėl, kad visų trijų pjūvių išpjaunamas kubelis turi būti trečiame sluoksnyje ir imant nuo viršaus, ir imant iš dešinės, ir imant iš priekio).
Dabar jau galime suskaičiuoti, kiek kubelių išpjauna visi trys pjūviai kartu. Kiekvienas pjūvis išpjauna 15 kubelių, iš viso $15 + 15 + 15 = 45$ kubelius. Bet į šią sumą po 2 kartus įskaityti kubeliai, kurie įeina į du pjūvius, — jų skaičių reikia atmesti. Gauname $45 - 3 - 3 - 3 = 36$. Bet ir šis skaičius negalutinis. Pagalvokime, kaip į jį įskaityti kubeliai (ar kubelis), kurie priklauso visiems trims pjūviams. Iš pradžių toks kubelis buvo įskaitytas į bendrą skaičių 3 kartus — kaip priklausantis kiekvienam pjūviui. Po to jis buvo atmestas tris kartus — kaip priklausantis kiekvienai pjūvių porai. Vadinasi, galų gale jis nebuvo paimtas į sumą nė karto. Vadinasi, tokių kubelių skaičių (mūsų atveju 1) reikia pridėti prie gautos sumos: $36 + 1 = 37$. Taigi 3 pjūviai išpjauna 37 kubelius.

B28. Ⓒ 12

! Sujunkime žvaigždės įgaubtąsias (240°) viršūnes su centru. Matome, kad visi 12 rombų lygūs, ir 6 iš jų priklauso žvaigždei. Vadinasi, šešiakampio plotas lygus 12.
Teisingas atsakymas **C**.



!! Sujungę šešiakampio viršūnes su centru ir sujungę gretimas įgaubtąsias žvaižděs viršūnes, šešiakampį padalijame į vienodus lygiakraščius trikampius. Kadangi užtušuotų ir neužtušuotų trikampių yra tiek pat, tai šešiakampio plotas lygus dvigubam žvaigždės plotui.
Galima ir neskaičiuoti, kiek yra trikampių. Sujunkime centrą su šešiakampio viršūnėmis. Šešiakampis bus padalytas į 6 lygiakraščius trikampius. Kiekviename trikampyje užtušuotos dalies plotas lygus neužtušuotos dalies plotui, nes vidurinės linijos trikampį padalija į 4 lygius trikampius, iš kurių du — užtušuoti. Vadinasi, užtušuotas ir neužtušuotas plotai lygūs.

B29. Ⓐ

! Visi kūnai turi tą patį kubelių skaičių. Todėl didžiausią paviršiaus plotą turi tas kūnas, kuriame suklijuotų kubelių sienų skaičius mažiausias. Galima skaičiuoti suklijavimų, o ne sienų skaičių — jis paprasčiausiai dvigubai mažesnis, nes vieną suklijavimą atitinka dvi suklijuotos sienos. Kūne **A** suklijavimų 6, kūne **B** — 7, kūne **C** — 8, kūne **D** — 7, kūne **E** — 8. Vadinasi, didžiausią paviršiaus plotą turi kūnas **A**.
Teisingas atsakymas **A**.

B30. Ⓓ 47

? Jei pavyktų sugalvoti skaičius, kurių skirtumas 47, tai „kengūrinis“ atsakymas būtų surastas — tai **D**. Bet siekiame skirtumą gauti kuo mažesnį — kyla mintis iš mažiausio dviženklio atimti didžiausią — iš 12 atiminėti 65. Likusius skaitmenis statome į pirmas vietas — iš 412 atimame 365. Štai ir gavome 47.
Renkamės atsakymą **D**.

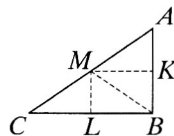
! Aišku, kad ieškomasis skirtumas mažesnis už 100: užtenka tų dviejų šimtų skaitmenis imti tesiskiriančius vienetu ir pirmojo dviženklę galūnę imti mažiausią, o antrojo — didžiausią iš įmanomų. Todėl skaičių, kurių šimtų skaitmenys skiriasi daugiau kaip vienetu, galima nenagrinėti, nes jų skirtumas didesnis už 100: jei $a \geqslant b+2$, tai $\overline{a**} - \overline{(b+1)00} \geqslant \overline{(b+2)**} - \overline{(b+1)00} = \overline{1**} > 100$.
Taigi reikia išnagrinėti skirtumus $2**-1**$, $3**-2**$, $4**-3**$, $5**-4**$, $6**-5**$.
Kiekvienu atveju pirmo skaičiaus dviženklę galūnę rašome kuo mažesnę (iš galūnių), antrą galūnę — kuo didesnę. Turime: $234-165(=69)$, $314-265(=49)$, $412-365(=47)$, 512-463(=49), $612-543(=69)$.
Vadinasi, mažiausias įmanomas skirtumas yra 47.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Sprendimą galima dar patobulinti. Matėme, kad pirmuosius skaitmenis reikia imti tesiskiriančius vienetu, o dviženkles galūnes imti pirmą — kuo mažesnę, o antrą — kuo didesnę. Tad nuo dviženklių galūnių ir pradėkime — jeigu jas kuo geriau pasirinkus likę du skaitmenys skirsis vienetu, tai geriau ir nebūna. Kadangi pati mažiausia įmanoma galūnė yra 12, o didžiausia 65, tai žiūrime, kokie gi skaitmenys lieka. Lieka 3 ir 4 (valio!) — jie skiriasi vienetu. Todėl mažiausias įmanomas skirtumas yra $412-365=47$.

KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. Ⓑ stačiakampis

! Aišku, kad trikampis lankstomas per jo vidurines linijas. Pažymėkime kraštinių AB, BC ir AC vidurio taškus K, L ir M.
Sulenkus trikampį per tiesę ML, trikampis MLC sutaps su trikampiu MLB, o sulenkus trikampį per tiesę MK, trikampis MKA sutaps su trikampiu MKB.
Taigi gausime stačiakampį $KBLM$ (iš dvigubo popieriaus).
Teisingas atsakymas **B**.



K2. Ⓔ 31

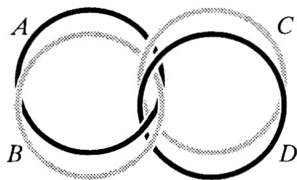
! Supakuoti 178 vienos spalvos kengūrėlėms reikia 18 dėžučių — į 17 dėžučių jos netelpa, o į 18 telpa. Supakuoti 121 kitos spalvos kengūrėlei reikia 13 dėžučių — į 12 jos netelpa, o 13 dėžučių užtenka. Iš viso prireiks 31 dėžutės.
Teisingas atsakymas **E**.
Pastaba. Sąlygoje geriau būtų sakyti ne „turi supakuoti po 10 į kiekvieną dėžutę", o „pakuoja į dėžutes, į kurias telpa po 10", bet ir senoji formuluotė nepadarė uždavinio dviprasmiško.

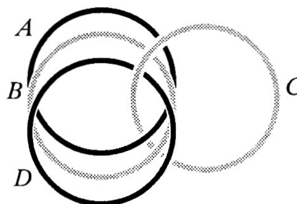
K3. Ⓒ C

? Žiedai A ir C sukibę (sąlygos paveikslėlyje viename jų „susikirtimo" taške vaizduojama, kad žiedas A yra virš žiedo C, o kitame — atvirkščiai) — vadinasi, vieną iš jų reikia pjauti. Bet perpjovus A, lieka sukibę žiedai C ir D. Vadinasi, reikia pjauti žiedą C.
Renkamės atsakymą **C**.

! Apskritai kalbant, dar nieko neįrodėme: o gal dar liko sukibusių žiedų, taigi norimo žiedo nėra, ir galbūt teisingas atsakymas **E**. Įsitikinkime, kad sukibusių žiedų, perpjovus C, nebelieka. Iš tikrųjų, A yra „virš" žiedo D ir žiedo B, o B — „virš" žiedo D. Vadinasi, perpjauti žiedą C gana.
O gal galima perpjauti dar kurį nors žiedą? Ne, jau įsitikinome, kad iš A ir C bent vieną žiedą pjauti reikia, ir A pjauti neverta. Vadinasi, vienintelis teisingas sprendimas — pjauti žiedą C.

!! Beje, nesunku nurodyti, kaip sukabinti žiedus, kad vieno iš jų perpjauti neužtenka (žr. pav. kairėje):





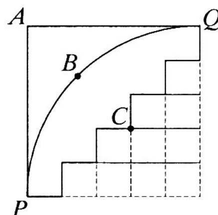
Perpjovus vieną žiedą, jo pareigas atlieka kaimynas. Mūsų atveju situacija tokia: A virš B, B virš D, ir žiedus galima suvaryti į padėtį, pavaizduotą dešinėje.

K4. Ⓑ 7

? Čia spėlioti nors ir neverta, bet galima. Tikrinkime atsakymą **C**. Tada klasėje mergaičių 9, berniukų $9 + 7 + 1 = 17$, o tai nėra du kartus daugiau, nei mergaičių.
Tikrinkime atsakymą **B**. Tada klasėje mergaičių 8, berniukų $8+7+1 = 16$, ir tai yra dukart daugiau.
Renkamės atsakymą **B**.

! Vis tiek geriausia sudaryti lygtį. Jeigu klasės draugių Giedrė turi x, tai mergaičių klasėje yra $x + 1$. Evaldas turi draugų berniukų $x + 8$, todėl klasėje berniukų yra $x + 9$. Bet berniukų klasėje dvigubai daugiau, todėl $x + 9 = 2(x + 1)$, $x = 7$.
Teisingas atsakymas **B**.

K5. Ⓑ 215 m ilgesnis



Kelias iš P į Q per C yra lygus keliui iš P į Q per A: kelio gabalų į dešinę suma yra lygi AQ, o kelio gabalų aukštyn suma yra lygi PA. Todėl kelias iš P į Q per C (kaip ir per A) yra ilgesnis 215 m už kelią per B.
Teisingas atsakymas **B**.

K6. Ⓑ -54

Atspėti mažiausią rezultatą paprasta: -63 neišeina, o $-54 = -9 \cdot 6$.
Renkamės atsakymą **B**.

Pasižiūrėkime, kokios sandaugos moduliu didžiausios. Išrikiuokime skaičių modulius: 9, 7, 6, 5, 4, 2. Surašykime jų didžiausias galimas sandaugas: $9 \cdot 7, 9 \cdot 6, 9 \cdot 5, 7 \cdot 6$ ir t. t. Sandaugos $9 \cdot 7$ padaryti neigiama neišeina. O štai antrą pagal didumą — išeina: $-9 \cdot 6 = -54$. Ji ir duoda mažiausią galimą rezultatą.
Teisingas atsakymas **B**.

K7. Ⓑ 15°

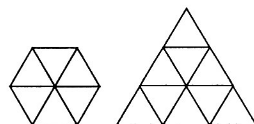
Kadangi $\angle OND = 60°$, tai gretutinis $\angle ONA = 120°$. Žinome ir antrą $\triangle ONA$ kampą: $\angle OAN = 45°$, nes tai lygiašonio stačiojo $\triangle ADC$ kampas. Todėl trečiasis $\triangle NOA$ kampas NOA lygus $= 15°$, ir tokio pat didumo yra jam kryžminis $\angle COM$.
Teisingas atsakymas **B**.

K8. Ⓐ Per 2 h

Per 10 h tėtė (taip pat mama) nuėda lapus nuo 2 eukaliptų. Trijulė per 10 h nuėda lapus nuo 5 eukaliptų, todėl vieną eukaliptą ji apės per 2 h.
Teisingas atsakymas **A**.

K9. Ⓐ $\frac{2}{3}$

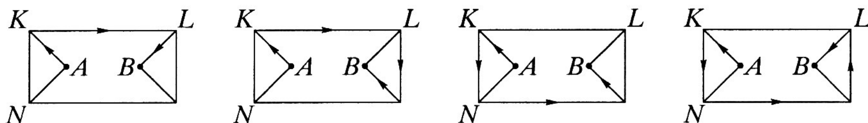
Padalykime ir taisyklingąjį šešiakampį su kraštine 1, ir taisyklingąjį trikampį su kraštine 3 į taisyklinguosius trikampius su kraštine 1 (žr. pav.).



Kadangi šešiakampį sudaro 6 trikampiukai, o trikampį — 9 trikampiukai, tai jų plotų santykis yra $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
Teisingas atsakymas **A**.

K10. Ⓓ 8

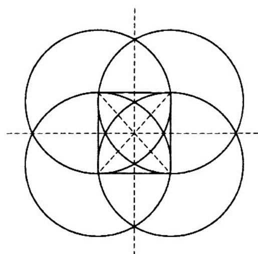
Iš taško A galima pradėti eiti per tašką K arba per tašką N. Dėl simetrijos vienokių ir kitokių kelių bus tiek pat.
Suskaičiuokime kelius, kurie prasideda atkarpa AK. Iš K galima eiti per L (2 keliai) arba per N (2 keliai).



Turime 4 kelius, kurie prasideda AK. Tiek pat yra kelių, kurie prasideda AN. Vadinasi, iš viso yra 8 keliai.
Teisingas atsakymas **D**.

K11. Ⓓ 12

? Galima tiesiog paimti skriestuvą ir, nubrėžus apskritimus, suskaičiuoti taškus — gauname 12 taškų. Renkamės atsakymą **D**.



! Vis dėlto įdomiau nebraižyti tų apskritimų. Kiekvieni du apskritimai kertasi dviejuose taškuose (nes atstumas tarp jų centrų yra 1 arba $\sqrt{2}$, taigi mažesnis už spindulių sumą 2). Kadangi keturių apskritimų yra 6 poros, tai iš viso gautume 12 susikirtimo taškų, tik reikia pasitikrinti, ar nė viename taške nesikerta 3 apskritimai.
Tarkime, kad radome tašką, kuris priklauso trims apskritimams. Vadinasi, tas taškas nutolęs nuo trijų kvadrato viršūnių atstumu 1. Kadangi jis vienodai nutolęs nuo viršūnių, tai jis yra kvadrato vidurinių linijų susikirtimo taškas — kitaip sakant — kvadrato centras. Bet kvadrato centras nuo viršūnių nutolęs mažesniu už 1 atstumu (kvadrato įstrižainė trumpesnė už 2, nes ji yra stačiojo trikampio su statiniais 1 ir 1 įstrižainė; todėl įstrižainės pusė mažesnė už 1). Prieštara.
Teisingas atsakymas **D**.

K12. Ⓔ Nikas ir Mikas paėmė po tiek pat riešutų

! Iš pradžių Nikas ima nuo pirmojo stalo kas trečią riešutą — iš viso $2001 : 3 = 667$ riešutus. Kai ant stalo lieka $2001 - 667 = 1334$ riešutai, jis ima kas penktą, ir paima $1330 : 5 = 266$ riešutus. Vadinasi, iš viso jis paėmė 933 riešutus.
Mikas iš pradžių ima kas penktą riešutą ir paima $2000 : 5 = 400$ riešutų. Tada ant antrojo stalo lieka $2001 - 400 = 1601$ riešutas, ir, imdamas kas trečią, Mikas paima dar $1599 : 3 = 533$ riešutus.
Taigi ir Mikas paėmė 933 riešutus.
Teisingas atsakymas **E**.

K13. Ⓒ 2

! Iš karto nustatome P reikšmę: sandauga $4 \times \overline{KLMNP4}$ baigiasi skaitmeniu 6. Vadinasi, $P = 6$. Turime lygybę

$$4 \times \overline{KLMN64} = \overline{4KLMN6}.$$

Sandauga kairėje baigiasi 56, todėl ir skaičius dešinėje baigiasi 56, vadinasi, $N = 5$. Gauname lygybę

$$4 \times \overline{KLM564} = \overline{4KLM56}.$$

Sandauga kairėje baigiasi 256, todėl $M = 2$.
„Kengūrinis“ atsakymas gautas. Bet iš tikrųjų dar nežinome, ar iš viso įmanoma duotoji lygybė. Todėl tęskime. Turime lygybę

$$4 \times \overline{KL2564} = \overline{4KL256}.$$

Kairės pusės sandauga baigiasi skaitmenimis 0256, todėl $L = 0$. Turime lygybę

$$4 \times \overline{K02564} = \overline{4K0256}.$$

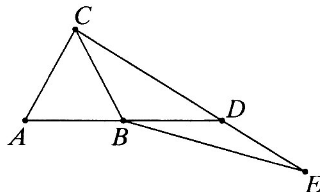
Sandauga kairėje baigiasi skaitmenimis 10256, todėl $K = 1$. Gauname lygybę

$$4 \times 102564 = 410256.$$

Ši lygybė teisinga, taigi dabar jau galima būti tikriems, kad duotoji lygybė įmanoma, o M gali būti tik lygus 2.
Teisingas atsakymas **C**.

K14. Ⓓ 15°

! Kadangi $DE = AB$ atidėta nuo taško D taip, kad atstumas CE būtų didžiausias galimas, tai taškai C ir E yra vienoje tiesėje su tašku D ir yra į skirtingas puses nuo jo.
Kampas CBA kaip lygiakraščio trikampio kampas lygus 60°, todėl $\angle CBD = 120°$. Trikampis CBD lygiašonis, nes $CB = AB = BD$, todėl $\angle BDC = 30°$. Trikampis BDE taip pat lygiašonis, nes $BD = AB = DE$. Todėl $\angle BED = 15°$.
Teisingas atsakymas **D**.



K15. Ⓒ 15

! Laikrodžio rodomo laiko pirmas valandų skaitmuo x gali įgyti reikšmes 0, 1 ir 2, o pirmas minučių skaitmuo y — reikšmes $0, 1, 2, 3, 4$ ir 5. Todėl kombinacijų xy, taigi ir kombinacijų $xy{:}yx$ būtų $3 \times 6 = 18$. Bet iš jų reikia išmesti variantus 00:00, 24:42, 25:52. Lieka 15 kombinacijų.
Teisingas atsakymas **C**.

K16. Ⓔ 750 kg

! Kai Noras atsigeria, nevanduo sudaro 15% jo masės, lygios 800 kg. Tai yra $800 \cdot 0{,}15 = 120\,(\text{kg})$. Kai Noras ištroškęs, nevanduo sudaro 16% ir atitinka tuos pačius 120 kg. Vadinasi, 1% atitinka $\frac{120}{16} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ (kg), o 100% atitinka $100 \cdot \frac{15}{2} = 750\,(\text{kg})$. Tokia ir yra ištroškusio Noro masė.
Teisingas atsakymas **E**.

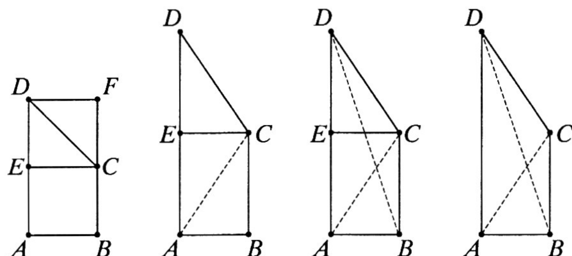
K17. Ⓑ 43

! Romas 5 ratus nubėgdavo per $12 \cdot 60$ sekundžių, todėl vieną ratą — per $12 \cdot 12 = 144$ sekundes. Tomas 3 ratus nubėgdavo per $10 \cdot 60$ sekundžių. Starto liniją Romas kirs kas 144 sekundes, o Tomas — kas 200 sekundžių. Abu kartu starto liniją jie kirs tada, kai praėjęs laikas bus ir 144, ir 200 kartotinis. Randame tų skaičių mažiausiąjį bendrąjį kartotinį: $144 = 12^2 = 2^4 \cdot 3^2$, $200 = 2^3 \cdot 5^2$, todėl mažiausias bendrasis kartotinis yra $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Per tą laiką Romas nubėgs $5^2 = 25$ ratus, o Tomas — $2 \cdot 3^2 = 18$ ratų. Iš viso kartu jie nubėgs $25 + 18 = 43$ ratus.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Romas įveikia ratą per 144 sekundes, Tomas — per 200 sekundžių. Kai Romas baigia pirmą ratą, Tomas įveikia tik $\frac{144}{200} = \frac{36}{50} = \frac{18}{25}$ rato ir atsilieka $\frac{7}{25}$ rato. Kai Romas įveiks 2 ratus, tai Tomas atsiliks $2 \cdot \frac{7}{25}$ rato, kai 3 — tai $3 \cdot \frac{7}{25}$ ir t. t., ir pirmą kartą sveikuoju ratų skaičiumi Tomas atsiliks, kai Romas įveiks 25 ratus. Tada Tomas bus atsilikęs $25 \cdot \frac{7}{25} = 7$ ratais ir bus nubėgęs $25 - 7 = 18$ ratų.
Galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad kalbamu momentu Romas bus nubėgęs x ratų, o Tomas y ratų. Romas vieną ratą nubėga per $\frac{12}{5}$ min, Tomas — per $\frac{10}{3}$ min. Jie bėgo vienodai laiko, todėl $\frac{12}{5}x = \frac{10}{3}y$, $18x = 25y$. Kairė pusė turi dalytis iš 25, todėl mažiausias $x = 25$, tada $y = 18$.
Visiškai aišku, kad toliau viskas kartosis, ir jeigu jie bėgtų toliau, jie kartu kirstų starto liniją kas $\frac{12}{5} \cdot 25 = 60\,(\text{min})$, t. y. kas valandą.

K18. Ⓐ 2

? Kadangi AB ir BC matmenys nenurodyti, tai imkime du vienetinius kvadratus $ABCE$ ir $ECFD$ (žr. pirmą paveikslėlį). Tada sąlygos išpildytos, nes S_{ABCD} yra $\frac{3}{2}$ kvadrato ploto, o S_{ACB} yra $\frac{1}{2}$ kvadrato ploto. Tada S_{ADB} yra pusė stačiakampio $ABFD$ ploto, t. y. 1, o $S_{ACB} = \frac{1}{2}$. Vadinasi, ieškomasis atsakymas $1 : \frac{1}{2} = 2$.
Renkamės atsakymą **A**.



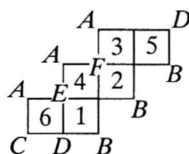
! Laikykime $\triangle ACB$ plotą vienetu (žr. antrą paveikslėlį). Tada $S_{ABCD} = 3$, todėl $S_{ACD} = 2$. Bet $S_{ADB} = S_{ADC}$, nes tai plotai trikampių su bendru pagrindu AD ir lygiomis aukštinėmis (nes iš sąlygos $BC \parallel AD$). Vadinasi, $S_{ADB} : S_{ABC} = S_{ADC} : S_{ABC} = 2 : 1$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Brėžkime $CE \parallel BA$ (žr. trečią paveikslėlį). Pagal sąlygą $S_{ABCD} = 3S_{ACB}$, $S_{ABCE} = 2S_{ACB}$, todėl $S_{EDC} = S_{ACB}$. Kadangi aukštinės $EC = AB$, tai pagrindai $DE = CB$, taigi $DE = EA$, $DA = 2CB$. Kadangi trikampių ADB ir ACB pagrindas bendras, tai $S_{ADB} = 2S_{ACB}$, ir ieškomasis santykis lygus 2. Iš tikrųjų čia įrodėme, kad mūsų konstrukcija yra stačiakampis ant stačiakampio.

!!! Pažymėkime $S_{ACB} = x$ (žr. ketvirtą paveikslėlį). Iš sąlygos $S_{ABCD} = 3x$. Bet $S_{DCB} = x$, nes $\triangle DCB$ turi bendrą pagrindą su $\triangle ABC$ ir tokią pat aukštinę. Todėl $S_{ADB} = 3x - x = 2x$, ir $S_{ADB} : S_{ACB} = 2x : x = 2$.

K19. Ⓓ 90

! Kai kubas sulankstytas, sienos susieis viršūnėse taip, kaip tai parodyta paveikslėlyje. Didžiausią sandaugą atitinka viršūnė C: $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$.
Teisingas atsakymas **D**.

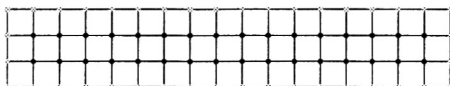


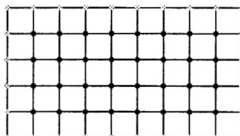
!! Didžiausia trijų iš parašytų skaičių sandauga yra $6 \cdot 5 \cdot 4$, bet jos negalima gauti, kadangi 4 ir 5 yra priešingose kubelio sienose. Kita didžiausia sandauga yra $6 \cdot 5 \cdot 3$, ir šitos sienos susieina į vieną viršūnę.

K20. Ⓑ 45

? Patogiau kalbėti apie mazgus — jie sudaro stačiakampį. Kadangi $32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, nusipieškime tokius tinklus. Pirmas tinklas turi $2 \cdot (32 + 2) + 2 = 70$ plūdžių, antras tinklas — $2 \cdot (16 + 2) + 2 \cdot 2 = 40$ plūdžių, trečias tinklas — $2 \cdot (8 + 2) + 4 \cdot 2 = 28$ plūdes. Matome, kad akučių jame yra 45.
Renkamės atsakymą **B**.





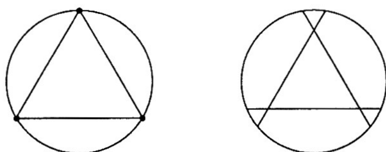


! Pasirodo, kad akutes suskaičiuoti labai lengva pagal plūdę ar mazgą jos kairiame viršutiniame kampe. Kiekvienas mazgas atitinka akutę, o plūdės — ne kiekviena: viršutinės (išskyrus vieną dešiniąją) atitinka akutę, apatinės (jų yra tiek pat kiek ir viršutinių) — ne; kitos kairiosios atitinka po akutę, dešiniosios (jų yra tiek pat) — ne. Taigi skaičiuojant akutes suskaičiuojamos visos plūdės ir pusė mazgų be vieneto. Vadinasi, akučių yra $32 + \frac{1}{2} \cdot 28 - 1 = 45$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Spręsdami faktiškai rėmėmės garsiąja Piko formule:
Daugiakampio (nebūtinai iškilojo) viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose. Daugiakampio viduje yra n gardelės mazgų, o kraštinėse — m mazgų. Tada daugiakampio plotas lygus $n + \frac{m}{2} - 1$.
Įrodymą žr. 161–162 psl. V. Prasolovo knygoje „Zadači po planimetrii“, 2 d., „Nauka“, Maskva, 1991. Sprendime ! šią formulę įrodėme paprasčiausiu stačiakampio atveju — to mums užteko uždaviniui išspręsti.

K21. Ⓔ 12

? Labai paprasta padalyti tortą į 5 ar 7 dalis.



Pavyzdžiui, kairiajame paveikslėlyje jau padaryti 3 pjūviai ir yra 4 dalys. Darykime dar vieną vertikalų pjūvį. Jei pjūvis bus artimas vertikaliajai apskritimo liestinei, tai gausime 5 dalis, o jei kirs 2 trikampio kraštines, tai gausime 7 dalis (beje, jei vertikalusis pjūvis eis per trikampio viršūnę — turėsime 6 dalis). Dešiniajame paveikslėlyje po 3 pjūvių turime 7 dalis. Vėl darykime vertikalų pjūvį. Jei judėsime iš kairės į dešinę nuo liestinės padėties iki vertikaliojo skersmens padėties, tai pjūvis eis atitinkamai per $1, 2, 3, 4, 3$ sritis ir dalys kiekvieną jų į 2 dalis — atitinkamai gausime $8, 9, 10, 11, 10$ dalių. Mokame padalyti į $3, 5, 7, 9, 11$ dalių — renkamės atsakymą **E**.

! Jau įsitikinome, kad tortą galima padalyti į bet kurį dalių skaičių nuo 5 iki 11. Ar tai jau viskas? Pasirodo — taip.
Visiškai aišku, kad mažiau kaip 5 dalys būti negali. Iš tikrųjų — pirmasis pjūvis duoda 2 dalis; antras bent vieną dalį dalija į 2 dalis — mažiausiai 3 dalys; trečias pjūvis vėl bent vieną dalį dalija į 2 dalis — 4 dalys; taigi po ketvirto pjūvio turėsime mažiausiai 5 dalis.
Sunkiau įrodyti, kad negalima gauti 12 ar daugiau dalių. Mums paprasčiau bus įrodyti, kad plokštumos 4 tiesėmis negalima padalyti į 12 dalių. O jeigu plokštumą jau padalijome į kelias dalis, tai ir tortą galima padalyti į tiek dalių. Iš tikrųjų, imkime didelį skritulį ir uždėkime jį taip, kad visi plokštumą dalijančių tiesių taškai atsidurtų jo viduje. Tada aišku, kad skritulys bus padalytas į tiek pat dalių, kaip ir plokštuma.
Taigi dalijame plokštumą tiesėmis į kuo daugiau dalių. Po pirmo dalijimo turime lygiai 2 dalis. Antra tiesė, jei kerta pirmąją, eina per abi dalis, taigi dalija kiekvieną dalį į 2, o plokštumą — į 4 dalis (o jei nekerta pirmos tiesės — gauname 3 dalis).
Veskime trečią tiesę. Susikirsdama su pirma ir antra tiesėmis, ji bus padalyta jomis daugiausiai į 3 dalis. Kiekviena tokia trečiosios tiesės dalis dalija vieną iš 4 dalių į dvi. Todėl sričių skaičius padidės trimis, ir gausime daugiausia 7 sritis.
Veskime ketvirtą tiesę. Ankstesnės 3 tiesės ją padalys daugiausia į 4 dalis, ir kiekviena dalis dalys sritį į dvi — sričių skaičius padidės daugiausia keturiomis, ir jų pasidarys 11.
Įrodėme, kad skaičius dalių, į kurias galima padalyti tortą, gali būti nuo 5 iki 11.
Vadinasi, atsakymas **E** yra teisingas.

!! Mes jau išmokome spręsti tokį uždavinį.
Į kiek dalių dalija plokštumą n tiesių, jeigu jokios 2 nėra lygiagrečios ir jokios 3 neina per vieną tašką?
Sričių, į kurias plokštumą dalija n tiesių, pažymėkime $F(n)$. Tada $(n+1)$-oji tiesė, susikirsdama su n ankstesniųjų, turi n sankirtos taškų, kurie dalija ją į $n+1$ intervalą ($n-1$ atkarpą ir 2 spindulius). Kiekvienas šių intervalų vieną iš $F(n)$ sričių dalija į dvi dalis ir dalių skaičių padidina vienetu. Vadinasi, išvedus $(n+1)$-ąją tiesę, dalių skaičius padidėja $n+1$. Gauname rekurentinę („grįžtamąją") formulę:

$$F(n+1) = F(n) + n + 1.$$

Taikydami ją, parašome lygybes:

$$F(n) = F(n-1) + n,$$
$$F(n-1) = F(n-2) + n - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(2) = F(1) + 2,$$
$$F(1) = F(0) + 1,$$
$$F(0) = 1.$$

Sudėję šias lygybes, gauname:

$$F(n) = n(n+1)/2 + 1.$$

(Rėmėmės formule $S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = n(n+1)/2$, kurią įrodyti lengva. Sudėkime lygybes

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n,$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Gauname $2S = (n+1)n$, t. y. $S = n(n+1)/2$.)

K22. Ⓓ 58

? Kad nubrauktume kuo daugiau taškų, reikia, kad įvertinimai būtų kuo lygesni. Kadangi $72 : 5 = 14, \ldots$, tai imame $14 + 14 + 14 + 15 + 15 = 72$. Nubraukus 14, liks $72 - 14 = 58$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi įvertinimų vidurkis yra $72 : 15 = 14, \ldots$, tai mažiausias įvertinimas negali būti didesnis už 14. Bet mažiausias įvertinimas 14 būti gali: $3 \cdot 14 + 2 \cdot 15 = 72$. Jį atmetę, gausime didžiausią galimą galutinę taškų sumą 58.
Teisingas atsakymas **D**.

K23. Ⓒ 105

! Vidurinio (nematomojo) kauliuko akučių skaičius lygus $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Kiekvienas iš matomų kauliukų turi po 21 akutę, bet iš jų paslėpta tiek pat, kiek jų turi centrinis kauliukas — 21. Vadinasi, iš pradžių talismano paviršiuje buvo $6 \cdot 21 - 21 = 5 \cdot 21 = 105$ akutės.
Teisingas atsakymas **C**.

K24. Ⓒ 3

Kad skaičius būtų mažiausias, jis bent jau turi turėti kuo mažiau skaitmenų. Kadangi kiekvienas skaitmuo ne didesnis už 9, tai skaitmenų skaičius turi būti ne mažesnis kaip $2001 : 9 = 222\frac{1}{3}$, t. y. ne mažesnis kaip 223. Vadinasi, mažiausio skaičiaus ieškome tarp 223-ženklių. Mažiausias tų skaičių skaitmuo gali būti tik 3: jeigu tai skaitmuo $\leqslant 2$, tai net devynetai neduoda reikiamos sumos, kadangi $222 \cdot 9 + 2 = 2 \cdot (999 + 1) = 2000$. O štai mažiausias skaitmuo 3 būti gali: užtenka likusius skaitmenis imti devynetus. Iš tokių skaičių mažiausias yra, kai pirmas skaitmuo mažiausias, t. y. pirmas skaitmuo 3.
Vadinasi, teisingas atsakymas **C**.

K25. Ⓔ 8 ir 16

Braižykime vaizdą iš viršaus ir sužymėkime, kiek daugiausiai kubelių gali būti eilutėse ir stulpeliuose. Nustatykime didžiausius galimus kubelių skaičius kiekviename laukelyje. Iš karto aišku, kad laukelyje *ad* (žr. kairįjį paveikslėlį) gali stovėti ne daugiau kaip 2 kubeliai. Laukelyje *bd* gali stovėti ne daugiau kaip 3 kubeliai ir t. t. Gauname kairiajame paveikslėlyje pavaizduotą padėtį. Joje 16 kubelių, ir ji įmanoma.

2*f*	2	2	2
1*e*	1	1	1
3*d*	2	3	2
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2*f*			
1*e*			
3*d*		3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

Dabar pagalvokime, kiek mažiausiai kubelių gali stovėti statinyje.
Eilutėje *d* turi stovėti 3 kubelių bokštelis, bet jis negali stovėti nei stulpelyje *a*, nei *c*. Vadinasi, 3 kubelių bokštelis stovi laukelyje *bd* (žr. dešinįjį paveikslėlį).
Stulpeliuose *a* ir *c* turi stovėti po 2 kubelių bokštelį. Jie negali stovėti eilutėje *e* — ten aukščiausias gali būti vienetinis kubelis.
Vadinasi, eilutėse *d* ir *f* jau turi stovėti bent 7 kubeliai, o pridėjus eilutę *e* — bent 8 kubeliai. 8 kubelius sudėti galima:

2*f*	2		
1*e*			
3*d*		3	2
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2*f*	2		2
1*e*			
3*d*		3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2*f*			2
1*e*			
3*d*	2	3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

2*f*	2	1	2
1*e*		1	
3*d*		3	
	a	*b*	*c*
	2	3	2

(Antroje eilutėje vieną kubelį galima statyti bet kur.)
Teisingas atsakymas **E**.

Įdomu, kad iš statinių su mažiausiu kubelių skaičiumi nė vienas nėra jungus, bet sąlygoje apie jungumą nėra užsiminta. Bet štai jeigu sąlygoje būtų, pavyzdžiui, pasakyta, kad iš kubelių suklijuotas kūnas, tai mažiausias kubelių skaičius būtų 9 (pavyzdžiui, tai galėtų būti kūnas, apibūdintas dešiniajame paveikslėlyje).

K26. Ⓓ 115

Pabandykime užpildyti kaip nors dėžes, kad gautume 102 tuščias. Pirmas žingsnis natūralus — į kiekvieną iš 11 didžiųjų dėžių dėkime po 8 vidutines. Turime 88 tuščias dėžes. Užpildyti 1 vidutinę mažosiomis dėžėmis per mažai. Imkime 2 vidutines ir užpildykime kiekvieną jų 8 mažosiomis. Turime tuščias 86 vidutines ir 16 mažų ir kaip tik 102 tuščias dėžes. Iš viso dėžių yra $11 + 88 + 16 =$ $= 115$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Iš tikrųjų sprendimas ? negarantuoja net teisingo „kengūrinio" atsakymo — o gal kitaip užpildžius dėžes, gausime kitokį atsakymą. Vadinasi, norint būti tikram, reikia tikrinti ir kitus dėjimo būdus. Užpildykime vidutinėmis dėžėmis 10 didžiųjų — turime $1 + 10 \times 8 = 81$ tuščią dėžę. Užpildžius dvi vidutines — tuščių per mažai, užpildžius keturias — tuščių per daug. Užpildžius tris — viskas gerai: tuščių $1 + 77 + 24 = 102$ dėžės. Iš viso turime $11 + 80 + 24 = 115$ dėžių.
Užpildę 9 didžiąsias, turime $2 + 9 \cdot 8 = 74$ tuščias dėžes, ir užpildę 4 vidutines, tuščių gauname $2 + 68 + 32 = 102$ dėžes, iš viso — $11 + 72 + 32 = 115$ dėžių.
Užpildę 8 didžiąsias, turime $3 + 8 \cdot 8 = 67$ tuščias dėžes, ir užpildę 5 vidutines, tuščių gauname $3 + 59 + 40 = 102$ dėžes, iš viso — $11 + 64 + 40 = 115$ dėžių.
Užpildę 7 didžiąsias, turime $4 + 7 \cdot 8 = 60$ tuščių dėžių, ir užpildę 6 vidutines, gauname $4 + 50 + 48 = 102$ tuščias dėžes, o iš viso $11 + 56 + 48 = 115$ dėžių.
Užpildę 6 didžiąsias, turime $5 + 6 \cdot 8 = 53$ tuščias dėžes. Užpildę dabar 7 vidutines, gauname $5 + 41 + 56 = 102$ tuščias dėžes, iš viso — $11 + 48 + 56 = 115$ dėžių.
Užpildę 5 didžiąsias, turime $6 + 5 \cdot 8 = 46$ tuščias dėžes. Užpildę vidutines, gauname $6 + 32 + 64 = 102$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 40 + 64 = 115$ dėžių.
Užpildę 4 didžiąsias dėžes, turime $7 + 4 \cdot 8 = 39$ tuščias dėžes. Užpildę 9 vidutines, gauname $7 + 23 + 72 = 102$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 32 + 72 = 115$ dėžių.
Užpildę 3 didžiąsias, turime $8 + 3 \cdot 8 = 32$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 24 + 80 = 115$ dėžių.
Užpildę 2 didžiąsias, turime $9 + 2 \cdot 8 = 25$ tuščias dėžes. Užpildę 11 vidutinių, turime $9 + 5 + 88 = 102$ tuščias dėžes, iš viso $11 + 16 + 88 = 115$ dėžių.
Užpildę 1 didžiąją, turime $10 + 1 \cdot 8 = 18$ tuščių dėžių. Bet net užpildę visas 8 vidutines, gausime tik $10 + 64 = 74$ tuščias dėžes, ir sąlyga nėra išpildyta.
Vadinasi, visais atvejais, kai uždavinio sąlygos išpildytos, atsakymas nekinta ir yra 115.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Žinoma, geriau pasitelkti algebrą. Užpildytų didžiųjų dėžių skaičių pažymėkime x, užpildytų vidutinių — y. Tada tuščių dėžių yra $102 = (11 - x) + (8x - y) + 8y$, todėl $7(x + y) = 91, x + y = 13$. Vadinasi, užpildytų dėžių yra 13, o iš viso dėžių 115.

K27. Ⓒ 20

! Kadangi kiekvieną iš 12 penkiakampių supa 5 šešiakampiai, tai gautume $12 \cdot 5 = 60$ šešiakampių. Bet kiekvieną šešiakampį supa 3 penkiakampiai, todėl šešiakampių yra trigubai mažiau — $60 : 3 = 20$. Teisingas atsakymas **C**.

!! Sakykime, šešiakampių yra x. Kiekvienas iš jų turi tris kraštines, bendras su penkiakampių kraštinėmis (o penkiakampiai pagal sąlygą bendrų kraštinių neturi). Vadinasi, penkiakampių kraštinių yra $3x$. Kadangi penkiakampių yra 12, tai $3x = 12 \cdot 5, x = 20$.

K28. Ⓑ 3

? $1664 = 2^7 \cdot 13$. Iš karto matome variantą $2^3, 13, 2^4$.
Renkamės atsakymą **B**.

! Jauniausiojo metų skaičius nesidalija iš 13 — kitaip sandauga dalytųsi iš 13^2. Vadinasi, tiek jauniausiojo, tiek vyriausiojo amžius yra dvejeto laipsniai. Kadangi vieno iš vaikų amžius ne mažesnis už 13, tai vyriausiojo amžius ne mažesnis už 2^4. Tada jauniausiasis ne jaunesnis už 2^3. Kadangi 2 įeina į sandaugą tik 7 laipsniu, tai vyriausiojo amžius yra 2^4, jauniausiojo — 2^3. Lieka dar vienas vaikas, kurio amžius 13. Vadinasi, yra 3 vaikai.
Teisingas atsakymas **B**.

K29. Ⓓ 758

! Natūralu suskaičiuoti, kiek yra būdų, kai a) Lukas eina žiūrėti rungtynių, ir kiek yra būdų, kai b) Lukas neina.
a) Jei Lukas eina, jis būtinai pasiima Matą. Lieka 8 berniukai. Kiekvienas jų gali eiti arba neiti.

Vadinasi, pirmą berniuką galima imti arba neimti; antrą berniuką galima imti arba neimti; ...; aštuntą berniuką galima imti arba neimti. Reikia padaryti 8 darbus (berniuką imti arba neimti), ir kiekvieną darbą padaryti yra dvi galimybės. Pagal sandaugos taisyklę yra $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^8 = 256$ galimybės.
b) Jei Lukas neina, lieka 9 berniukai. Sudarinėjant grupes, kiekvieną jų galima imti arba neimti, taigi pagal sandaugos taisyklę galime sudaryti $2^9 = 512$ būdų.
Iš tų grupių netinka ta, kurioje yra 0 berniukų (t. y. kai visi berniukai nepaimti) ir grupės, kuriose yra 1 berniukas (tokių grupių yra 9 — pagal berniukų skaičių). Vadinasi, iš viso iš 9 berniukų galime sudaryti $512 - 1 - 9 = 502$ grupes.
Iš viso gauname $256 + 502 = 758$ grupes.
Teisingas atsakymas **D**.

!! a) Jei Lukas eina, jis būtinai pasiima Matą. Lieka nuo 0 iki 8 vietų — jas galima užpildyti $1 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + \cdots + C_8^8 = 256$ būdais.
b) Jei Lukas neina, lieka nuo 2 iki 10 vietų — jas galima užpildyti $C_9^2 + C_9^3 + \cdots + C_9^9 = 502$ būdais. Iš viso gauname $256 + 502 = 758$ būdus.
Teisingas atsakymas **D**.

K30. © 3

? Nesunku atspėti, kad jeigu A sugeba palikti 9 akmenukus, tai jis laimi. Iš tikrųjų, jei B iš 9 akmenukų dabar ima $2, 3, 4, 5, 6, 7$, tai A atitinkamai ima $7, 6, 5, 4, 3, 2$ akmenukus (kitaip sakant — visus). Jei B ima 1 akmenuką (liko 8), tai A ima 4 (lieka 4), B priverstas imti 2 (kitaip A paims visus; lieka 2), A ima 1 ir laimi (B neturi ėjimo).
Dabar jau nesunku atspėti, kad A verta imti 3 akmenukus (ir palikti 17). Jeigu dabar B ima $1, 2, 5, 6, 7$, tai A ima $7, 6, 3, 2, 1$ ir palieka 9 akmenukus (taigi laimi).
Jeigu B iš 17 ima 4 akmenukus (ir palieka 13), tai A ima 2 (ir palieka 11). Jei iš 11 dabar B ima $4, 5, 6, 7$, tai A ima likusius $7, 6, 5, 4$. Jei iš 11 dabar B ima 3 akmenukus, tai lieka 8, ir matėme, kad A laimi imdamas 4. Pagaliau, jei B iš 11 ima 1 akmenuką ir palieka 10, tai A ima 5 (B imti 5 negali) ir sekančiu ėjimu užbaigia partiją.
Renkamės atsakymą **C**.

! Įrodėme, kad imdamas pirmu ėjimu 3 akmenukus, A laimi. Vadinasi, „kengūriškas“ atsakymas gautas. Bet ne pro šalį įrodyti, kad kiti A ėjimai pralaimi.
Iš tikrųjų, jei A ima $4, 5, 6, 7$ akmenukus, tai B atitinkamai ima $7, 6, 5, 4$, palieka 9 ir todėl laimi.
Jei A ima 2 akmenukus, tai B ima 1 akmenuką ir palieka 17 akmenukų. Matėme, kad tokioje padėtyje A pralošia, jei A ima $2, 4, 5, 6, 7$ akmenukus. Bet jis taip pat pralošia, jeigu ima 3 akmenukus: lieka 14 akmenukų, B ima 7 ir sekančiu ėjimu užbaigia partiją.
Jei A ima 1 akmenuką, tai B ima 2 akmenukus, palieka 17 akmenukų ir todėl laimi.
Vienintelis teisingas atsakymas **C**.

JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. Ⓒ 16

! Aišku, kad mažiausiai akučių gausime, kai visų trijų kauliukų atvirs 1 akutė, o daugiausiai — kai visų trijų kauliukų atvirs 6 akutės. Sumos mažiausia reikšmė lygi 3, didžiausia — 18. Akivaizdu, kad įgyjamos ir visos tarpinės reikšmės. Taigi iš viso reikšmių yra 16.
Teisingas atsakymas **C**.

J2. Ⓒ A yra trečias nuo vieno iš kraštų

? Imame D tarp E ir F — turime eilę EDF. Įstatę C tarp D ir E, gauname $ECDF$. Įstatę B tarp C ir D gauname $ECBDF$. Įstatę A tarp B ir C turime $ECABDF$.
Renkamės atsakymą **C**.

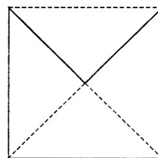
! Sprendimas ? negarantuoja net „kengūrinio" atsakymo — gal paėmus kitą padėtį, gausime A antrą nuo krašto. Tada matyt reikėtų rinktis atsakymą **E**. Taigi reikia nagrinėti visus variantus. Pradėkime nuo 1) sąlygos — D stovi tarp E ir F, t. y. turime EDF arba FDE. 2) sąlyga sako, kad C yra tarp D ir E, taigi turime $ECDF$ arba $FDCE$. 3) sąlyga sako, kad B yra tarp C ir D, taigi turime $ECBDF$ arba $FDBCE$. 4) sąlyga sako, kad A yra tarp B ir C, taigi gauname $ECABDF$ arba $FDBACE$.
Matome, kad abi eilutės atitinka atsakymą **C**, tad kiti atsakymai netinka.

J3. Ⓑ 10 cm

? Pradėkime tikrinti atsakymus nuo **C**. Atmetę įstrižainę, gauname likusių kraštinių sumas 6 ir 15, iš viso 21 — netinka (atmetėme per daug). Tikrinkime **B** — tada sumos 11 ir 20, iš viso kaip tik 31.
Renkamės atsakymą **B**.

! Jei įstrižainės ilgis x, tai pirmo daugiakampio kraštinių (be tos įstrižainės) ilgių suma lygi $21 - x$, o kito $30 - x$. Bet $21 - x + 30 - x = 31$, $2x = 20$, $x = 10$.
Teisingas atsakymas **B**.

Pastaba. Laikėme, kad daugiakampis iškilasis. Jeigu jis neiškilas, iš karto kyla daugybė klausimų — kas yra įstrižainė, ką reiškia „dalija" į du daugiakampius ir pan. Pavyzdžiui, kas yra nupiešto penkiakampio įstrižainės, kas yra jų ilgiai, ar visos jos dalija daugiakampį į 2 dalis ir t. t.



J4. Ⓓ 110

! Matome, kad iš kairės į dešinę kūno matmuo yra 4, iš priekio į užpakalį — 5, iš apačios į viršų — 4. Vadinasi, kūnas telpa į kubą $5 \times 5 \times 5$, o pridėti reikia $125 - 15 = 110$ kubelių.
Teisingas atsakymas **D**.

J5. Ⓑ m yra skaičiaus 35 kartotinis

? Imkime kokį nors skaičių, kad DBD būtų didesnis už 10, pavyzdžiui, 70 (čia DBD yra 35). Tada visi atsakymai neteisingi, išskyrus **B**.
Renkamės atsakymą **B**.

! Reikia dar įsitikinti, kad atsakymas **B** visada teisingas, kad ir kokį skaičių m (tenkinantį uždavinio sąlygą) imtume. Kadangi skaičius 35 turi tik 4 daliklius — $1, 5, 7, 35$, o DBD yra didesnis už 10, tai tas DBD yra 35. Kadangi m dalijasi iš DBD $= 35$, tai jis yra 35 kartotinis.

J6. Žr. uždavinio M16 sprendimą.

J7. Ⓒ 3

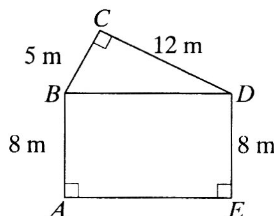
! Surašykime visus skaičius, mažesnius už 2001, kurių suma lygi 2. Tai skaičiai, kurie turi dvejetą ir kitus nulius (arba pats dvejetas) ir skaičiai, kurie turi du vienetus ir kitus nulius (arba tik 2 vienetus):

$$2, 11, 20, 101, 200, 1001, 2000.$$

Skaičiai, kurie baigiasi nuliu, yra sudėtiniai — lieka 2, 11, 101, 1001. Kadangi $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ yra sudėtinis, tai lieka 3 skaičiai.
Teisingas atsakymas **C**.

J8. Ⓒ 46 m

? Panašu, kad sklypą sudaro stačiakampis ir statusis trikampis. Pastarojo įžambinė lygi 13 m (nes $5^2 + 12^2 = 13^2$). Todėl sklypo tvoros ilgis yra $8 + 13 + 8 + 12 + 5 = 46$ (m).
Renkamės atsakymą **C**.



! Sujunkime taškus B ir D. Kadangi $BA = DE$ ir $BA \parallel DE$, tai $ABDE$ — lygiagretainis, ir $AE = BD$. Bet $\triangle BCD$ statusis, todėl pagal Pitagoro teoremą $BD = 13$ m. Ieškomasis perimetras lygus $2 \cdot 8 + 5 + 12 + 13 = 46$ (m).

J9. Ⓑ 11

! Kadangi $225 = 3^2 \cdot 5^2$, tai ieškomasis skaičius turi dalytis ir iš $5^2 = 25$, ir iš $3^2 = 9$. Vadinasi, jis turi baigtis mažiausiai dviem nuliais, o jo skaitmenų suma (t. y. vienetų skaičius) turi dalytis iš 9. Mažiausias toks skaičius yra 11 111 111 100. Jis turi 11 skaitmenų.
Teisingas atsakymas **B**.

J10. Žr. uždavinio K3 sprendimą.

J11. Ⓓ 5

! Kadangi $a + b = cd$, tai iš antros lygybės $cd + c = 12$, $c(d + 1) = 12$. Kadangi c ir d natūralieji, tai $d + 1$ gali įgyti reikšmes 2, 3, 4, 6, 12. Vadinasi, d gali įgyti penkias reikšmes. Tikriname:

Kai $d = 1$, tai $c = 6$, $a + b = 6$ (pavyzdžiui, $a = b = 3$).
Kai $d = 2$, tai $c = 4$, $a + b = 8$ (pavyzdžiui, $a = 3, b = 5$).
Kai $d = 3$, tai $c = 3$, $a + b = 9$ (pavyzdžiui, $a = 3, b = 6$).
Kai $d = 5$, tai $c = 2$, $a + b = 10$ (pavyzdžiui, $a = 3, b = 7$).
Kai $d = 11$, tai $c = 1$, $a + b = 11$ (pavyzdžiui, $a = 3, b = 8$).

Visos reikšmės tinka.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Galėtų pasirodyti, kad toks tikrinimas per daug skrupulingas. Vis dėlto — įsivaizduokime, kad sąlygoje pasakyta:
Skirtingi natūralieji skaičiai a, b, c ir d tenkina lygybes $a + b = cd$ ir $a + b + c = 12$. Kiek reikšmių gali įgyti d?
Sprendimas būtų tas pats, o štai tikrindami nustatytume, kad reikšmė $d = 3$ netinka.

J12. Ⓒ 40°

! Lengva nustatyti trikampio, kuriame yra φ, kitus kampus — tai kampas, gretutinis kampui 70° ($180° - 70° = 110°$), ir įbrėžtinis kampas, besiremiantis į tą patį lanką, kaip ir 30° kampas (vadinasi, lygus 30°). Todėl $\varphi = 180° - 110° - 30° = 40°$.
Teisingas atsakymas **C**.

J13. Ⓔ $\frac{168X}{Y}$

? Imkime paprastus skaičius — sakykime, kad kiekvieną valandą laikrodis pavėluoja 1 minutę. Kadangi savaitėje $7 \cdot 24 = 168$ valandos, tai tinka tik atsakymas **E**.

! Per 1 h laikrodis pavėluoja X/Y minučių, todėl per $7 \cdot 24 = 168$ h jis pavėluos $168X/Y$ minučių. Teisingas atsakymas **E**.

J14. Ⓑ 56

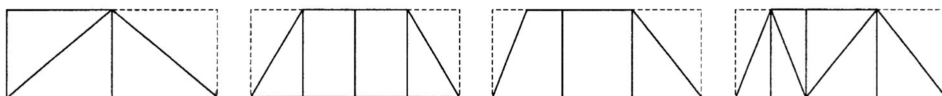
! Kadangi už 7 šokoladukus reikia mokėti $6 \cdot 4 = 24$ kronas, tai už $14 \cdot 7 = 98$ šokoladukus jis užmokės $14 \cdot 24 = 336$ kronas. Už likusius 2 šokoladukus jam teks mokėti po 4 kronas, taigi iš viso jis sumokės 344 kronas ir sutaupys 56 kronas.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Septyni šokoladukai kainuoja tik $6 \cdot 4 = 24$ kronas, todėl perkant 7 šokoladukus iš karto sutaupoma $7 \cdot 4 - 24 = 4$ kronos. Kadangi septynetukų galima sudaryti 14, tai galima sutaupyti $14 \cdot 4 = 56$ kronas.

!!! O dabar išspręskime tokį uždavinį:
Kasparas turi 416 kronas, ir jam reikia nupirkti 104 šokoladukus. Supermarkete šokoladukai parduodami pavieniui po 4 kronas ir supakuoti į septynetus — po 20 kronų už pakelį.
Kaip Kasparui naudingiausia pirkti?
Sprendžiame: kadangi į 104 telpa tik 14 septynetukų ($15 \cdot 7 = 105$), tai Kasparas pirkdamas ne 7 saldainius, o pakelį gali sutaupyti $7 \times 4 - 20 = 8$ kronas. Pirkdamas 14 pakelių jis sutaupo $8 \cdot 14 = 112$ kronų. Vadinasi, Kasparui naudingiausia pirkti 14 pakelių ir 6 palaidus šokoladukus, — taip jis sutaupo 112 kronų.
Ir vis dėlto šitoks sprendimas neteisingas.
Kur čia šuo pakastas? O gal čia pakastas ne šuo, o šokoladukai? Žodžiu, išspręskite teisingai uždavinį patys.

J15. Ⓐ $10\,\text{cm}^2$

? Atsakymas matyt nepriklauso nuo to, kaip stumdomas viršutinis pagrindas. Pristumkime jį į kairę visiškai ir nuleiskime iš viršutinio pagrindo galo statmenį (žr. pirmą paveikslėlį). Kadangi stačiakampiai pagal sąlygą lygūs, tai trapeciją sudaro trys trikampiai. Vadinasi, ieškomas plotas lygus $10\,\text{cm}^2$.
Renkamės atsakymą **A**.



?? Ir vėl — kadangi atsakymas matyt nepriklauso nuo viršutinio pagrindo stumdymo, darykime trikampius lygius. Dalijame viršutinį pagrindą pusiau — jis jau padalytas į 4 lygias dalis. Nuleidžiame iš dalijimo taškų aukštines (žr. antrą paveikslėlį). Du trikampiai sudaro stačiakampį, o trapeciją — trys stačiakampiai. Vadinasi, trikampių plotas yra $10\,\text{cm}^2$.
Teisingas atsakymas **A**.

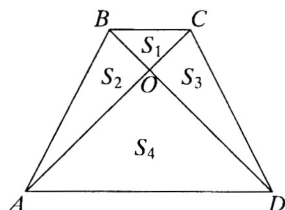
! Nesunku sprendimą **?** padaryti griežtą. Nuleiskime iš viršutinio pagrindo galų statmenis (žr. trečią paveikslėlį). Kadangi vidurinio stačiakampio pagrindas dukart mažesnis už didžiojo, tai vidurinio stačiakampio plotas lygus pusei didžiojo stačiakampio ploto. Todėl ir mažųjų stačiakampių bendras plotas lygus pusei didžiojo. Vadinasi, tas plotas (taigi ir vidurinio stačiakamio plotas) lygus dvigubam nukirptųjų trikampų bendram plotui, o trapecijos plotas — trigubam nukirptųjų trikampių plotui (nes ją sudaro vidurinis stačiakampis ir nukirptiesiems lygūs trikampiai). Vadinasi, ieškomas plotas yra $30 : 3 = 10\,(\text{cm}^2)$.

!! Dar gražesnį sprendimą gauname atidėję viršutiniame trapecijos pagrinde nukirptojo kairiojo trikampio pagrindą ir iš gauto taško bei viršutinio pagrindo galų nuleidę statmenis (žr. ketvirtą paveikslėlį). Kairysis stačiakampis lygus antram, o trečiasis lygus ketvirtam (kodėl?). Išveskime viduriniuose trikampiuose po įstrižainę. Trapeciją sudaro 3 mažesnieji trikampiai ir 3 didesnieji trikampiai, todėl jos plotas trigubai didesnis už nukirptųjų trikampių plotų sumą.

J16. Žr. uždavinio K16 sprendimą.

J17. Žr. uždavinio K28 sprendimą.

J18. Ⓓ $S_4 = 9S_1$



? Kadangi atsakymas matyt nepriklauso nuo to, kokią trapeciją imsime, tai laikykime, kad trapecija lygiašonė, o jos įstrižainės statmenos. Tada trikampių BOC ir BOA statinis BO bendras, taigi $AO = 3OC$. Vadinasi, $\triangle AOD$ statiniai 3 kartus didesni už $\triangle BOC$ statinius, todėl $S_4 = 9S_1$.
Renkamės atsakymą **D**.

! Trikampiai BOA ir BOC turi bendrą aukštinę, todėl $AO : OC = 3$. Bet trikampiai AOD ir BOC panašūs, todėl $S_4 = 9S_1$.

J19. Ⓔ 30

? Skaičiai 4, 8, 12 dalijasi iš 4, o skaičiai 2, 6, 10, 14 dalijami iš 4 duoda liekaną 2. Kadangi jie yra keturi, tai bet kaip surašius pliusus ir minusus reiškinio reikšmė dalysis iš 4. Vadinasi, 30 gauti negalima.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi visų skaičių suma lygi 56, tai norint gauti 0 reikia surinkti 28 ir prieš dėmenis dėti minusus. Bet $4 + 6 + 8 + 10 = 28$, taigi 0 gavome. Kad suma būtų 4, reikia imti neigiamus 26, pavyzdžiui, $12 + 14$. Kad suma būtų -4, reikia neigiamų surinkti 30, pavyzdžiui, $6 + 10 + 14$. Kad suma būtų 48, reikia neigiamų 4, taigi užtenka padėti minusą prieš 4, o kitur sudėti pliusus. Norint gauti 30, reikia neigiamų surinkti 13, bet tai neįmanoma — visi dėmenys lyginiai.
Teisingas atsakymas **E**.

J20. Ⓔ 9

? Atėmę 3 iš 999, turime 996. Matome, kad skaičius dalijasi iš $12 = 3 \cdot 4$, todėl imkime $n = 12$. Tada skaičiaus $2001 = 1992 + 9$ dalybos iš 12 liekana yra 9, nes 1992 dalijasi ir iš 3, ir iš 4.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi 999 dalijant iš n liekana yra 3, tai 996 dalijasi iš n. Todėl $2 \cdot 996$ taip pat dalijasi iš n, o $2001 = 2 \cdot 996 + 9$ dalijamas iš n duoda liekaną 9 (primename, kad n dviženklis skaičius; jeigu sąlygoje to nebūtų pasakyta, tai paėmę $n = 6$ liekaną gautume ne 9, o 3).

J21. Ⓓ 13

! Jei Paulius pirmą dieną suvalgė x, o antrą — y saldainių, tai abu su Kriste jie suvalgė

$$\frac{3}{4}x + x + \frac{2}{3}y + y = 31$$

saldainį. Dauginame lygtį iš 12: $9x + 12x + 8y + 12y = 31 \cdot 12$, $21x + 20y = 31 \cdot 12$.
Matome, kad x dalijasi iš 4, turi turėti paskutinį skaitmenį 2, ir būti mažesnis už 31. Vadinasi, $x = 12$, tada $20y = 31 \cdot 12 - 21 \cdot 12 = 10 \cdot 12$, $y = 12 : 2 = 6$. Kadangi Paulius suvalgė 18 saldainių, tai Kristė suvalgė 13.
Teisingas atsakymas **D**.

J22. Ⓑ $\frac{pc}{2p+c}$

? Imkime $c = 3, p = 3, q = 1$. Tada $BC = 5$, ir Jono ir Vyto keliai vienodi: $3 + 3 = 1 + 5$. Atsakymas **A** duoda reikšmę $\frac{3}{2} + 3$, atsakymas **B** — $\frac{9}{6+3} = 1$, atsakymas **C** — $\sqrt{18} + \frac{3}{2}$, atsakymas **D** — $\frac{3+3}{2}$, atsakymas **E** — 0. Taigi neatmestina tik reikšmė 1.
Renkamės atsakymą **B**.

! Iš sąlygos $p + c = q + \sqrt{(p+q)^2 + c^2}$. Keliame q į kairę pusę ir keliame kvadratu:
$p^2 + c^2 + q^2 + 2pc - 2pq - 2cq = p^2 + q^2 + c^2 + 2pq, 2pq + cq = pc, q = \frac{pc}{2p+c}$.
Teisingas atsakymas **B**.

J23. Žr. uždavinio K26 sprendimą.

J24. Ⓑ 2

! Pirmo dėmens paskutinis skaitmuo 9, nes $7^{1998} = 49^{999}$ baigiasi 9 (kadangi $9^{998} = 81^{499}$ baigiasi 1). Antro dėmens paskutinis skaitmuo 2, nes $8^{1999} = 8^{4 \cdot 499}$ baigiasi kaip ir $6 \cdot 2$. Trečio dėmens paskutinis skaitmuo 1, nes $9^{2000} = 81^{1000}$ baigiasi 1. Paskutinis dėmuo baigiasi 0. Vadinasi, a baigiasi kaip ir $9 + 2 + 1 = 12$, t. y. skaitmeniu 2.
Teisingas atsakymas **B**.

J25. Ⓒ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2

! Trikampio PQR kraštinės lygios (sukant kubą apie įstrižainę EC kampais 120° ir 240°, taškai P, Q ir R pereina vienas į kitą; beje, tai aišku ir iš to, kad PQ, QR ir RP yra lygių stačiųjų trikampių įžambinės). Kraštinės PQ ilgį apskaičiuojame iš stačiojo trikampio PHQ, kuriame $HQ = 1$ cm, $PH = \sqrt{PD^2 + DH^2} = \sqrt{5}$ (cm). Todėl $PQ = \sqrt{6}$ cm, ir $S_{PQR} = 3\sqrt{3}/2$ cm^2.
Teisingas atsakymas **C**.

J26. Ⓔ 36

! Gardelėje galima nubrėžti 6 horizontalias ir 6 vertikalias 5 cm ilgio atkarpas. Dar galima nubrėžti atkarpas, kurios yra stačiakampio su kraštinėmis 3 cm ir 4 cm įstrižainės (jų ilgis irgi 5 cm). Iš viso tokių stačiakampių su viršūnėmis gardelėje yra 12, ir kiekvienas jų turi 2 įstrižaines. Nesunku įsitikinti, kad daugiau tokių sveikaskaičių stačiųjų trikampių nėra: išskyrus 3 ir 4, jokių dviejų mažesnių ar lygių 5 skaičių kvadratų suma nėra skaičiaus kvadratas. Vadinasi, galima nubrėžti dar 24 pasvirąsias atkarpas, taigi iš viso — 36 atkarpas.
Teisingas atsakymas **E**.

J27. Ⓒ 2

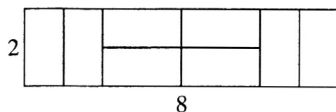
! Užrašykime reikiamą natūralųjį skaičių kaip $n = \overline{ab} = 10a + b$, kur b — paskutinis jo skaitmuo. Pagal sąlygą $14a = 10a + b$, todėl $b = 4a$. Kadangi $0 \leqslant b \leqslant 9$, o $a \neq 0$, tai $a = 1, b = 4$ arba $a = 2, b = 8$. Gauname du skaičius: 14 ir 28.
Teisingas atsakymas **C**.

J28. Ⓓ $16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$

! Mažųjų pusskritulių spindulys lygus 1. Didžiųjų pusskritulių spindulį x galima apskaičiuoti iš stačiojo trikampio KRL, kuriame $RL = LM = 1$, $RK = 4 : 2 = 2$. Pagal Pitagoro teoremą $(x+1)^2 = 2^2 + 1^2$, iš čia $x = \sqrt{5} - 1$. Bendras šešių pusskritulių plotas lygus $2\pi + \pi(\sqrt{5} - 1)^2$, t. y. $8\pi - 2\sqrt{5}\pi$. Todėl užtušuotos srities plotas $A - B$ lygus $16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$.
Teisingas atsakymas **D**.

J29. Ⓔ 34

! Padėkime stačiakampį 2 × 8 horizontaliai ir jo nebevartykime. Jame „kauliukai" 1 × 2 gali būti dedami horizontaliai arba vertikaliai. Aišku, kad jeigu kuris nors kauliukas padėtas vertikaliai, tai po jo eina arba vertikalus kauliukas, arba vienas virš kito horizontalūs kauliukai.



Vadinasi, stačiakampyje bus keli kvadratai, kuriuose plytelės guli horizontaliai, o visos likusios plytelės stovės vertikaliai. Jei kvadratų 0 (visi kauliukai stovi vertikaliai), tai turime 1 būdą. Jei kvadratas vienas, tai jis gali prasidėti $1, 2, \ldots, 7$ stulpelyje — 7 būdai.
Jei kvadratai du, tai pirmas gali prasidėti:
1 stulpelyje, tada antras — 3, 4, 5, 6, 7 (5 būdai),
2 stulpelyje, tada antras — 4, 5, 6, 7 (4 būdai),
3 stulpelyje, tada antras — 5, 6, 7 (3 būdai),
4 stulpelyje, tada antras — 6, 7 (2 būdai),
5 stulpelyje, tada antras — 7 (1 būdas).
Taigi su dviem kvadratais turime 15 būdų.
Jei kvadratai trys, tai jie gali prasidėti
1, 3, 5
1, 3, 6
1, 3, 7
1, 4, 6
1, 4, 7
1, 5, 7
2, 4, 6
2, 4, 7
2, 5, 7
3, 5, 7
langeliuose — 10 būdų. (Beje, atveju su trimis kvadratais neblogai skaičiuoti ne kur gali stovėti kvadratai, o kur gali stovėti vertikalios plytelės — jų tik 2, tik reikia nepamiršti, kad prieš jas, po jų ir tarp jų turi būti lyginis stulpelių skaičius — kad įtilptų kvadratai; tai stulpeliai
1 ir 2, 1 ir 4, 1 ir 6, 1 ir 8
3 ir 4, 3 ir 6, 3 ir 8,
5 ir 6, 5 ir 8,
7 ir 8,
ir vėl, žinoma, gavome 10 būdų.)
Jei kvadratai keturi — vienintelis būdas.
Iš viso gavome $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$ būdus.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Pažymėkime D_k skaičių būdų, kuriais galima uždengti kauliukais 2×1 stačiakampį $2 \times k$. Kiekvieną tokį denginį galima gauti, iš stačiakampio $2 \times (k-1)$, pridėjus vieną vertikalų kauliuką, o jei ne — tai iš stačiakampio $2 \times (k-2)$ denginio, prijungus prie jo du horizontalius kauliukus. Todėl $D_k = D_{k-2} + D_{k-1}$. Kadangi $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, tai $D_3 = 3$, $D_4 = 5$, $D_5 = 8$, $D_6 = 13$, $D_7 = 21$, $D_8 = 34$. Vadinasi, stačiakampį 2 × 8 galima uždengti 34 būdais.

J30. Ⓑ 75

! Išrikiuokime dėmenis pagal didumą — pirmą imkime didžiausią, antrą — mažesnį (arba lygų), trečią — dar mažesnį. Aišku, kad pirmo dėmens didžiausia reikšmė 28, mažiausia — 10.
Pradėkime nuo didžiausio dėmens — 28. Kitiems dėmenims lieka 2, taigi turime $1 + 1$ (1 būdas).
Jei pirmas dėmuo 27, lieka 3, turime $2 + 1$ (1 būdas).
Jei pirmas dėmuo 26, lieka 4, turime $3 + 1$, $2 + 2$ (2 būdai).
Jei pirmas dėmuo 25, lieka 5, turime $4 + 1$, $3 + 2$ (2 būdai).
Jei pirmas dėmuo 24, lieka 6, mažiausias dėmuo gali būti 1, 2, 3 (3 būdai).

Jei pirmas dėmuo 23, lieka 7, trečias gali būti nuo 1 iki 3 (3 būdai).
Jei pirmas dėmuo 22, lieka 8, trečias gali būti 1–4 (4 būdai).
Jei pirmas dėmuo 21, lieka 9, trečias gali būti 1–4 (4 būdai).
Jei pirmas dėmuo 20, lieka 10, trečias gali būti 1–5 (5 būdai).
Jei pirmas dėmuo 19, lieka 11, trečias gali būti 1–5 (5 būdai).
Jei pirmas dėmuo 18, lieka 12, trečias gali būti 1–6 (6 būdai).
Jei pirmas dėmuo 17, lieka 13, trečias gali būti 1–6 (6 būdai).
Jei pirmas dėmuo 16, lieka 14, trečias gali būti 1–7 (7 būdai).
Jei pirmas dėmuo 15, lieka 15, trečias gali būti 1–7 (7 būdai).
Jei pirmas dėmuo 14, lieka 16, antras gali būti nuo 14 iki 8 (7 būdai).
Matome, kad čia situacija pasikeitė — reikia atsižvelgti į tai, kad antras dėmuo turi būti ne didesnis už pirmąjį ir ne mažesnis už likučio pusę.
Jei pirmas dėmuo 13, lieka 17, antras gali būti 13–9 (5 būdai).
Jei pirmas dėmuo 12, lieka 18, antras gali būti 12–9 (4 būdai).
Jei pirmas dėmuo 11, lieka 19, antras gali būti 11–10 (2 būdai).
Jei pirmas dėmuo 10, lieka 20, antras gali būti 10 (1 būdas)
Iš viso gavome $2(1+2+3+4+5+6+7)+6+5+4+2+1=75$ būdus.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Surašykime sprendimą formaliau. Išrikiuokime dėmenis didėjimo tvarka. Aišku, kad pirmas dėmuo gali kisti nuo 1 iki 10, t. y. jam yra 10 galimybių.
Jei pirmas dėmuo yra x, tai antras negali būti mažesnis už x ir didesnis už $\left[\frac{30-x}{2}\right]$ (laužtiniai skliaustai žymi sveikąją dalį). Vadinasi, antram dėmeniui yra $\left[\frac{30-x}{2}\right]-(x-1)$ galimybių.
Trečias dėmuo vienareikšmiškai nustatomas pasirinkus pirmus du dėmenis. Kadangi x gali kisti nuo 1 iki 10, tai ieškomasis būdų skaičius yra

$$\left[\frac{30-1}{2}\right]+\left(\left[\frac{30-2}{2}\right]-1\right)+\left(\left[\frac{30-3}{2}\right]-2\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{30-4}{2}\right]-3\right)+\left(\left[\frac{30-5}{2}\right]-4\right)+\left(\left[\frac{30-6}{2}\right]-5\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{30-7}{2}\right]-6\right)+\left(\left[\frac{30-8}{2}\right]-7\right)+\left(\left[\frac{30-9}{2}\right]-8\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{30-10}{2}\right]-9\right)=14+13+11+10+8+7+5+4+2+1=75.$$

Niekuo nesiskiria sprendimas, jeigu skaičių imsime ne 30, o n.
Pirmas dėmuo x tada gali būti nuo 1 iki $\left[\frac{n}{3}\right]$, o antras — nuo x iki $\left[\frac{n-x}{2}\right]$, taigi jam yra $\left[\frac{n-x}{2}\right]-(x-1)$ galimybių. Vadinasi, būdų yra

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left(\left[\frac{n-2}{2}\right]-1\right)+\left(\left[\frac{n-3}{2}\right]-2\right)+\cdots+\left\{\left[\frac{n-\left[\frac{n}{3}\right]}{2}\right]-\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right)\right\}.$$

Įdomiausia, kad šitas baisus skaičius lygus ... sveikajam skaičiui, kuris yra artimiausias skaičiui $\frac{n^2}{12}$ (pavyzdžiui, kai $n=30$, tai $\frac{n^2}{12}=\frac{30^2}{12}=75$, ir atsakymas yra 75; kai $n=4$, savaime aišku, kad tėra vienas būdas išreikšti 4 trijų dėmenų suma: $4=1+1+2$, ir $\frac{n^2}{12}=\frac{4^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$, o sveikasis skaičius, artimiausias $\frac{4}{3}$, yra 1, kaip ir reikėjo tikėtis).
Įrodymą, kad atsakymą galima užrašyti taip glaustai, galima pasiskaityti puikioje A. Jaglomo ir I. Jaglomo knygoje „Neelementarnyje zadači v elementarnom izloženii“, Maskva, 1954 (rusų klb.).

SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. Ⓑ 3

! Jeigu Juozas turi bent 4 pilkas peles, tai pelių septynete, į kurį įeina tos 4 pelės, tėra 3 pilkos pelės, — prieštara. Vadinasi, Juozas turi daugiausiai 3 pilkas peles.
Renkamės atsakymą **B**.

!! Juozas gali turėti lygiai 3 pilkas peles. Iš tikrųjų, tada bet kuriame septynete bus daugiausiai 3 pilkos pelės, ir mažiausiai keturios pelės bus baltos.
Teisingas atsakymas **B**.

S2. Ⓐ 8

! Kadangi dėžutės tūris $64\,\text{cm}^3$, tai jos kraštinė $4\,\text{cm}$. Vadinasi, dėžutę galima suskaidyti į $2 \times 2 \times 2$ ląsteles, iš kurių kiekvienoje telpa po vieną metalinį rutuliuką.
Aišku, kad daugiau rutuliukų į dėžutę patalpinti negalima.
Renkamės atsakymą **A**.

!! Sumažinkime visus matmenis 2 kartus. Tada gauname ekvivalentų uždavinį:
Kiek daugiausiai metalinių rutuliukų, kurių skersmuo 1, galima įdėti į kubinę dėžutę, kurios tūris lygus 8?
Griežtai įrodyti, kad į dėžutę netelpa 9 rutuliukai, sunku (o gal ir neįdomu).

S3. Ⓔ $\frac{1}{a}$

! Pagal logaritmo pagrindo keitimo formulę gauname: $\log_{10} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 10} = \frac{1}{a}$.

!! Kadangi $\log_2 10 = a$, tai $2^a = 10$, todėl $\log_{10} 2^a = 1$, $a \cdot \log_{10} 2 = 1$, $\log_{10} 2 = \frac{1}{a}$.

S4. Ⓔ Kitas skaičius

! Išrašykime visus skaičius, mažesnius už 1000, kurių skaitmenų suma lygi 2. Tai skaičiai, kurie turi dvejetą ir po jo kitus nulius (arba pats dvejetas), ir skaičiai, kurie turi du vienetus ir kitus nulius (arba tik 2 vienetus):

$$2, 11, 20, 101, 110, 200.$$

Skaičiai 2, 11 ir 101 yra pirminiai, taigi lieka skaičiai 20, 110 ir 200.
Teisingas atsakymas **E**.

S5. Ⓑ $\frac{1}{3}$

! Turima galvoje, kad reikia rasti sąlygą tenkinančių triženklių skaičių kiekio ir visų triženklių skaičių kiekio santykį.
Triženklių skaičių — skaičių nuo 100 iki 999 yra tiek pat, kiek ir nuo 1 iki 900 (atėmėme po 99), t. y. 900. Lyginių skaičių nuo 400 iki 999 yra kiek ir nuo 0 iki 599, o tai tiek pat, kiek nuo 1 iki 600, t. y. $600 : 2 = 300$. Todėl ieškomoji tikimybė lygi $300 : 900 = 1/3$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Įdomus klausimas, kaip galima realizuoti atsitiktinį triženklio skaičiaus pasirinkimą. Yra išrasta daug būdų tai padaryti — kompiuteriu, naudojantis vadinamosiomis atsitiktinių skaičių lentelėmis ir pan. O mes galime įsivaizduoti, kad visus triženklius skaičius nuo 100 iki 900 surašome ant popierėlių, juos susukame į gniužulėlius, sumetame į „būgną“, gerai išmaišome ir ištraukiame vieną iš jų.

S6. Ⓓ 10^9

! Prie skaitiklio pridėję 1, gautume 1 su 18 nulių, t. y. 10^{18}. Vadinasi, skaitiklis yra $10^{18} - 1$, vardiklis $10^9 - 1$, todėl duotasis skaičius lygus $(10^{18} - 1)/(10^9 - 1) - 1 = (10^9 + 1) - 1 = 10^9$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Galima apsieiti ir be formulių. Subendravardiklinę duotąjį reiškinį, gauname
$999\,999\,999\,000\,000\,000/999\,999\,999 = 1\,000\,000\,000$.

S7. Ⓐ $x = y$

! Kadangi $BCED$ lygiagretainis, tai $BC = DE$. Kadangi trikampių BCA ir DEC pagrindai lygūs ir aukštinės lygios, tai $S_{BCA} = S_{DEC}$. Todėl $x = S_{BCA} + S_{ACD} = S_{DEC} + S_{ACD} = y$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Galima remtis ir ploto formulėmis: $x = (AD + BC)h/2 = (AD + DE)h/2 = AE \cdot h/2 = y$.

S8. Ⓑ 7

! Iš sąlygos turime $xyzt = 2002$. Kadangi $2002 = 2 \cdot 1001 = 2 \cdot 11 \cdot 91 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, tai nesunku surašyti visus galimus ketvertus:
$1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 143, 1 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 91, 1 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 77, 1 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 26, 1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 22, 1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14, 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Jų yra 7.
Teisingas atsakymas **B**.

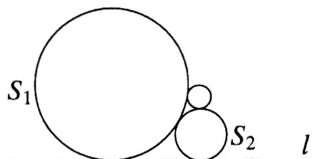
S9. Ⓓ 17:25

! Sakykime, kad tai įvyks po x valandų. Tada pirmas dviratininkas bus nuvažiavęs $32x$ km, o antras $24x$ km. Atstumo tarp jų kvadratas pagal Pitagoro teoremą lygus $(32x)^2 + (24x)^2 = 130^2$. Todėl $16^2x^2 + 12^2x^2 = 65^2, 4^2x^2(4^2 + 3^2) = 65^2, 16x^2 = 13^2, 4x = 13, x = 3\frac{1}{4}$ h. Vadinasi, tai įvyks 14 val. 10 min. + 3 val. 15 min. = 17 val. 25 min.
Teisingas atsakymas **D**.

S10. Žr. uždavinio J5 sprendimą.

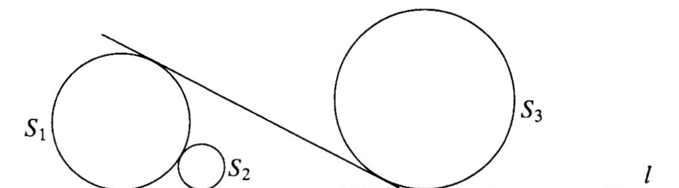
S11. Ⓒ Yra lygiai du apskritimai, kurie liečia S_1, S_2 ir l

? Retas atvejis, kai iš viso geriausia spėti — ką nors įrodyti per keletą minučių vistiek nepavyks.
Iš karto matome, kad apskritimų ir tiesės apribotame „kreiviniame trikampyje" yra reikiamas apskritimas. Tai, kaip sakoma, aišku iš „fizikinių sumetimų". Iš tikrųjų, imkime tokio mažo spindulio apskritimą, kad šis dar tilptų kreivinės srities viduje. Pradėkime apskritimą „pūsti" kaip kamuolį ir laikykime, kad jis tik „atsiremia" į srities „kraštines", o iš srities išlįsti negali. Tada jis iš pradžių palies vieną „kraštinę", po to — kitą ir pagaliau — trečią.
Kadangi atsakymas matyt nepriklauso nuo apskritimų spindulių santykio, tai imkime mažesniojo apskritimo spindulį „mažą". Dabar vėl remkimės fizikiniais sumetimais ir imkime „mažą" apskritimą, kuris liestų apskritimus S_1 ir S_2.

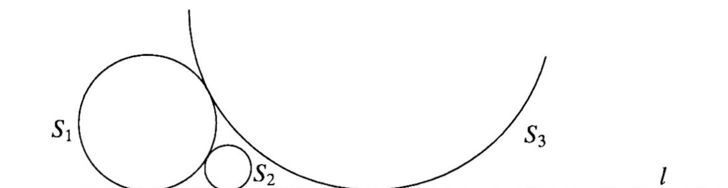


Vėl pradėkime trečią apskritimą pūsti, spausdami jį prie S_1 ir S_2. Aišku, kad kai apskritimas pasidarys „didelis", jis kirs tiesę, o prieš tai bus momentas, kai jis tiesę lies.
Daugiau reikiamų apskritimų nematyti.
Renkamės atsakymą **C**.

! Iš tų pačių fizikinių sumetimų aišku, kad atsakymas toks bus visada. Įsitikinkime tuo.

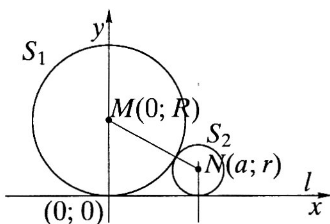


Išveskime liestinę apskritimui S_1, lygiagrečią tiesei l. Dabar tą liestinę vos vos pasukime, kad S_2 liktų po ja ir neliestų jos. Ta liestinė jau kirs tiesę l. Į liestinės ir tiesės sudaromą kampą įbrėžkime apskritimą. Dabar apskritimą pūskime, kad jis visą laiką liestų kampo kraštines. Kairysis lietimosi taškas slinks link S_1 ir galų gale jį palies. Gausime paveiksle pavaizduotą padėtį.



Turime apskritimą S_3, kuris liečia S_1 ir l, o apskritimas S_2 yra po juo. Dabar stenkimės, kad apskritimas S_3 visą laiką liestų S_1 ir l ir „išleidinėkime orą“, t. y. mažinkime apskritimo S_3 spindulį. Aišku, bus momentas, kai apskritimas S_3 palies S_2. Toliau mažinant apskritimo S_3 spindulį, apskritimas S_3 atsidurs trikampės srities viduje ir lies apskritimą S_2 iš „kitos pusės“.
Taigi taip samprotaudami gavome abi reikiamas apskritimo padėtis ir įsitikinome, kad daugiau jų nėra.

!! Galima uždavinį išspręsti ir „griežtai“, tiesa, tai ... nelabai įdomu.
Sakykime, kad S_1 ir S_2 centrai yra M ir N, o spinduliai R ir r, $R > r$.
Įveskime koordinačių sistemą taip, kad l sutaptų su x-ų ašimi, o y ašis eitų per M. Galima laikyti, kad N yra į dešinę nuo y ašies. Tada taškų M ir N koordinatės yra $(0; R)$ ir $(a; r)$, kur a — apskritimų bendros liestinės ilgis (laikome, kad M yra į dešinę nuo y ašies).



Pagal Pitagoro teoremą $a^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$. Tarkime, kad egzistuoja apskritimas S_3 su spinduliu t ir centru taške $(b; t)$, kuris liečia S_1, S_2 ir l. Kadangi S_3 liečia apskritimą S_1, tai vėl

$$b^2 = (R + t)^2 - (R - t)^2 = 4Rt.$$

Kadangi S_3 liečia ir apskritimą S_2, tai vėl pagal Pitagoro teoremą

$$|b - a|^2 = (r + t)^2 - |r - t|^2,$$
$$(b - a)^2 = (r + t)^2 - (r - t)^2,$$
$$4rt = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Įstatę į paskutinę lygybę $a = 2\sqrt{Rr}$ ir $b = 2\sqrt{Rt}$, gauname

$$4rt = 4Rr + 4Rr - 8R\sqrt{rt},$$
$$2R\sqrt{rt} = Rr + Rt - rt,$$
$$4R^2rt = R^2r^2 + R^2t^2 + r^2t^2 + 2R^2rt - 2r^2Rt - 2Rrt^2,$$
$$(R-r)^2t^2 - 2Rr(R+r)t + R^2r^2 = 0,$$
$$t = \frac{Rr(R+r) \pm \sqrt{R^2r^2(R+r)^2 - R^2r^2(R-r)^2}}{(R-r)^2} = \frac{2Rr}{(R-r)^2} \cdot \left(\frac{R+r}{2} \pm \sqrt{Rr}\right).$$

Kadangi skliaustuose aritmetinis vidurkis didesnis už geometrinį ($R > r$), tai visada gauname dvi reikšmes t_1 ir t_2 ir atitinkamai du apskritimus su spinduliais t_1 ir t_2, kurie liečia S_1, S_2 ir l. Įrodėme, kad teisingas atsakymas **B**.

S12. Ⓐ $16\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

! Nubraižyta figūra vaizduoja išklotinę taisyklingosios trikampės prizmės, kurios šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei. Šios prizmės tūris lygus $V = SH = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 16\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.
Teisingas atsakymas **A**.

S13. Ⓔ 25

? Čia spėti labai lengva — pakelis greičiausiai kainuoja 25 centus. Tada iš tikrųjų už 16 pakelių jūs mokate 4 dolerius, o už 1 dolerį gaunate 4 pakelius.
Spėjimą dar palengvina tai, kad greičiausiai 100 turi dalytis iš pakelio kainos.
Renkamės atsakymą **E**.

! Jeigu pakelis kainuoja x centų $= \frac{x}{100}$ dolerio, tai 16 pakelių kainuoja $\frac{x \cdot 16}{100}$ dolerių. Už vieną dolerį jūs gaunate $1 : \frac{x}{100} = \frac{100}{x}$ pakelių. Pagal sąlygą $\frac{x \cdot 16}{100} = \frac{100}{x}$, $16x^2 = 100^2, 4x = 100, x = 25$ centai.
Teisingas atsakymas **E**.

S14. Ⓐ $(10^4+1)^2$

! Nario 10^8 numeris yra 10^4, todėl sekančio sekos nario numeris yra $10^4 + 1$. Vadinasi, sekantis sekos narys yra $(10^4+1)^2$.
Teisingas atsakymas **A**.

S15. Ⓔ $\overrightarrow{CE}$

! Kadangi $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$, tai

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}.$$

Atsakymuose jam lygus tik vektorius $\overrightarrow{CE}$.

Tą patį sprendimą galima užrašyti $-\overrightarrow{AD}$ pakeitus $\overrightarrow{DA}$:

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AF} =$$
$$= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} =$$
$$= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}.$$

Teisingas atsakymas **E**.

!! Kadangi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, o $2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$, tai duotasis reiškinys lygus $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$. Žinoma, uždavinį galima spręsti tiesiog braižant vektorius.

S16. Ⓐ Laimėjo A

! Iš viso buvo sužaistos $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ rungtynės, per kurias visos komandos gavo $7+4+3+3 = 17$ taškų iš 18 galimų. Vadinasi, tik vienerios rungtynės baigėsi lygiosiomis (per tokias rungtynes komandos gauna po 1 tašką — iš viso 2 taškus; jei rungtynės baigiasi ne lygiosiomis, komandos gauna $3+0 = 3$ taškus — kitaip sakant, sužaidusios lygiomis, o ne kitaip, abi komandos skaičiuojant jų bendrus taškus praranda 1 tašką). Todėl C ir D neturėjo lygiųjų, ir lygiosiomis sužaidė A su B. Todėl komanda A likusias dvejas rungtynes laimėjo (taigi ir prieš D).
Teisingas atsakymas **A**.

S17. Ⓓ $\pi(3 - 2\sqrt{2}) + 1$

? Čia spėti verta: iš karto matome, kad dviejų užtušuotų trikampių plotas 1, o skritulio plotas — maždaug pusė baltojo trikampio, t. y. maždaug 0,5. Todėl iš karto atkrenta atsakymai **A**, **B**, **C**. Kadangi $\pi \frac{\sqrt{2}}{2} > 3 \cdot 0{,}7$, atkrenta ir šitas atsakymas.
Renkamės atsakymą **D**.

! Baltojo trikampio plotas lygus 1, o jo perimetras $2 + 2\sqrt{2}$. Todėl įbrėžtinio apskritimo spindulys lygus $1/(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} - 1)$, o plotas lygus $\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2})$. Pridedame užtušuotųjų trikampių plotą, kuris lygus 1.
Teisingas atsakymas **D**.

S18. Ⓔ ab

? Atspėti atsakymą lengva, paėmus paprasčiausią trikampį, tenkinantį sąlygą — lygiašonį statųjį su kraštinėmis $0{,}9/\sqrt{2}$; $0{,}9/\sqrt{2}$; $0{,}9$. Tada atsakymai virsta skaičiais $0{,}9^2$; $0{,}9^2 \cdot 2$; $0{,}9$; $0{,}9\sqrt{2}$; $0{,}9^2/2$. Iš jų paskutinis mažiausias.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi stačiojo trikampio įžambinė mažesnė už 1, tai $a < 1, b < 1$, todėl $a > a^2$, $b > b^2$. Vadinasi, $a + b > a^2 + b^2 \geqslant 2ab > ab$. Kita vertus, $(a + b)^2 > a^2 + b^2$, o $ab < 0{,}9 \cdot 0{,}9 < 0{,}9$. Taigi mažiausias skaičius yra ab.
Beje, užtenka stačiojo trikampio nelygybių: $a < c, b < c, a + b > c$. Iš tikrųjų,

$$a^2 + b^2 = c^2 = c \cdot c > a \cdot b,$$
$$(a + b)^2 > c^2 = c \cdot c > a \cdot b,$$
$$0{,}9 = c > a > a \cdot b,$$
$$a + b > c > a > ab.$$

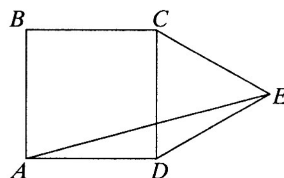
!! Įdomiausia būtų išrikiuoti skaičius pagal dydį. Matėme, kad

$$(a + b)^2 > a^2 + b^2 > ab, \quad a + b > 0{,}9 > a^2 + b^2 > ab.$$

Vadinasi, skaičiai $a^2 + b^2 > ab$ mažiausi. O štai skaičius $(a + b)^2$ įsiterpti į antrą eilutę gali ir prieš $a + b$, ir po 0,9, ir tarp $a + b$ ir 0,9. Iš tikrųjų, jeigu $(a + b)^2 \geqslant 1$ (kaip pavyzdyje su $a = b = 0{,}9/\sqrt{2}$, tai skaičius $(a + b)^2$ ne mažesnis už abu.
Jeigu $0{,}9 < (a + b)^2 \leqslant 1$ (pavyzdžiui, $a + b = 0{,}99$), tai $0{,}9 < (a + b)^2 \leqslant a + b$.
Pagaliau, kai $(a + b)^2 \leqslant 0{,}9$ (pavyzdžiui, $a + b = 0{,}9$), tai $(a + b)^2 \leqslant 0{,}9 < a + b$.

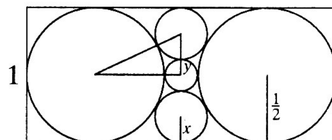
S19. Žr. uždavinio K25 sprendimą.

S20. Ⓒ 45°



Trikampis AED lygiašonis, todėl $\angle EAD = \angle DEA = (180^\circ - \angle ADE)/2 = 15^\circ$. Vadinasi, $\angle AEC = 60^\circ - \angle AED = 45^\circ$.

S21. Ⓓ $\sqrt{5}$



Sakykime, kad brėžinyje pavaizduotų mažesniųjų apskritimų spinduliai yra x ir y. Tada iš brėžinio aišku, kad $4x + 2y = 1$. Remiantis Pitagoro teorema $(1/2+x)^2 = (x+y)^2 + (1/2+y)^2$, $x = 2xy + 2y^2 + y$. Dauginame pastarąją lygtį iš 4 ir įstatome $4x = 1-2y$. Tada $1-2y = 2y(1-2y)+8y^2+4y$, $4y^2+8y-1 = 0$, $(2y+2)^2 = 5$, $2y + 2 = \sqrt{5}$, $2y = \sqrt{5} - 2$.
Vadinasi, ilgesnioji stačiakampio kraštinė lygi $2 + 2y = \sqrt{5}$.

S22. Ⓒ Trečia

Aišku, kad bet kuris stačiakampis $4k \times m$ (arba $m \times 4k$, o tai yra tas pat) turi vienodai visų 4 spalvų langelių. Padalykime mūsų stačiakampį į du: apačioje tegu bus stačiakampis 40×43, o viršuje — stačiakampis 3×43. Viršutinį stačiakampį vėl dalykime į du: kairėje 3×3, dešinėje 3×40. Kadangi stačiakampiuose 40×43 ir 3×40 kiekvienos spalvos langelių tiek pat, tai viską lemia kvadratas 3×3, esantis kairiajame viršutiniame lentelės kampe. Matome, kad jame daugiausia trečios spalvos langelių.
Teisingas atsakymas **C**.

S23. Ⓔ 9

Kadangi skaičius 2001 dalijasi iš 3, tai jau 2001^2 dalijasi iš 9. Vadinasi, duotojo skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9 ir t. t. Todėl ir gautas vienaženklis skaičius $l(2001^{2001})$ dalysis iš 9, t. y. bus lygus 9.
Teisingas atsakymas **E**.

S24. Ⓑ 2

Paskutinis kvadrato skaitmuo gali būti $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Kiekvieną skaičių $\overline{ab}$ galima užrašyti kaip $10a + b$. Kadangi $(\overline{ab})^2 = (10a + b)^2 = 100a + 20ab + b^2$, tai paskutinis kvadrato skaitmuo negali būti nelyginis: jei $b = 1, 3, 5, 7, 9$, tai $b^2 = 1, 9, 25, 49, 81$, ir $(\overline{ab})^2$ priešpaskutinis skaitmuo lyginis. Vadinasi, lieka patikrinti galūnes 00, 44, 66. Bet galūnę 66 galėtų turėti tik lyginio skaičiaus kvadratas, o tada jis dalytųsi iš 4. Vadinasi, lieka galūnės 00 ir 44. Jos tikrai įmanomos — pavyzdžiui, $10^2 = 100$, $12^2 = 144$.
Teisingas atsakymas **B**.

S25. Ⓓ 28

Kadangi $\lg mn = \lg m + \lg n \approx 27{,}7$, tai $27 < \lg mn < 28$, iš čia $10^{27} < mn < 10^{28}$. Vadinasi, sandauga mn turi 28 skaitmenis.
Teisingas atsakymas **D**.

S26. Ⓒ 9

Iš karto aišku, kad 5 kėlimųsi neužteks — net jei valtys būtų pilnos, persikelti į antrą krantą būtinai reikėtų 3 kėlimųsi, o valtį kas nors turi grąžinti. Nesunku sugalvoti, kaip 9 kėlimaisi perkelti visus:

Nr.	I krantas	Valtyje	II krantas
1	VV	$BB \rightarrow$	–
2	VV	$B \leftarrow$	B
3	VB	$V \rightarrow$	B
4	VB	$B \leftarrow$	V

Keturiais persikėlimais pervkėlėme vieną vyrą (V) į kitą krantą. Dar keturiais persikėlimais perkeliame kitą vyrą. Paskutiniu devintuoju kėlimusi persikelia abu berniukai.
Renkamės atsakymą **C**.

! 1) Aišku, kad pirmą kartą keltis per upę turi abu berniukai — kitaip valtis grįš su tuo pačiu žmogumi atgal, ir turėsime pradinę padėtį.
Vėl aišku, kad grįžti turi tik vienas iš berniukų — kitaip vėl gausime pradinę padėtį.
2) Dabar persikelti turi vyras — kitaip vėl gausime turėtą padėtį.
Dabar grįžti turi antras berniukas — kitaip vėl gausime turėtą padėtį.
3) Dabar keltis negali berniukas — kitaip gausime turėtą padėtį. Negali keltis ir suaugęs — po sekančio kėlimosi vėl gausime turėtą padėtį. Todėl keltis turi abu berniukai.
Grįžti turi vienas berniukas: jei grįš abu berniukai, gausime turėtą padėtį; jei grįš vyras — po sekančio ėjimo vėl gausime turėtą padėtį.
4) Dabar keliasi vyras — kitaip gausime turėtą padėtį.
Grįžti turi berniukas — kitap vėl gausime turėtą padėtį.
5) Dabar abu berniukai keliasi į kitą krantą. Gavome $4 \cdot 2 + 1 = 9$ persikėlimus.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Formalizuokime sprendimą ir įsitikinkime, kad šis 9 upės kirtimų persikėlimo būdas — vienintelis. Įsivaizduokime, kad radome trumpiausią būdą persikelti. Tada jame po kelių persikėlimų padėtis negali kartotis — tuos persikėlimus tiesiog išbrauktume ir gautume trumpesį būdą. Pradinę padėtį žymėkime $VVBB - 0$. Po pirmo persikėlimo galima gauti 3 padėtis:

$$VVB - B, VV - BB, VBB - V$$

(aišku, kad mums visiškai nesvarbu, kuris vyras ar kuris berniukas keliasi). Pirma ir trečia padėtis po sekančio persikėlimo veda prie pradinės padėties. Vadinasi, trumpiausio būdo pirmas kėlimasis yra
1) $VV - BB$.
Antras „ėjimas“ privalomas:
2) $VVB - B$.
Trečias kėlimasis aiškus — jei B grįš, gausime 1) padėtį. Vadinasi,
3) $VB - VB$.
Vėl vyrui grįžus gausime 2) padėtį, todėl grįžta berniukas:
4) $VBB - V$.
Berniukui plaukti neverta — gausime 3) padėtį. Vyrui plaukti neverta — po privalomo sekančio ėjimo vėl gausime 4) padėtį. Todėl plaukia abu berniukai:
5) $V - VBB$.
Vėl abiem berniukam grįžti neverta, plaukti vyrui — irgi neverta (V bus priverstas grįžti). Taigi
6) $VB - VB$.
Dabar keltis berniukui neverta — gausime 5) padėtį, todėl
7) $B - VVB$.
Grįžti vyrui neverta, todėl
8) $BB - VV$.
Vienam berniukui keltis negalima — gausime 7 padėtį. Taigi
9) $0 - VVBB$.
Įrodėme, kad tik tokiais vieninteliais ėjimais 9 persikėlimais pasiekiame tikslą.
Daugiau apie panašius uždavinius galima pasiskaityti žurnale „Alfa plius omega“ 2000 metų Nr. 1(9) J. Mačio straipsnyje „Tyrimo uždaviniai ir galingieji medžiai“.

S27. Ⓒ $2\sqrt{37 \cdot 13}$

! Nuleiskime statmenį iš apskritimo centro A į stygą EF ir jo ilgį pažymėkime h. Statmuo stygą EF dalija pusiau, todėl pagal Pitagoro teoremą $FE^2/4 = R^2 - h^2$, kur $R = AC$ — apskritimo spindulys. Bet $AC = BD = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{4^2 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{4^2 + 3^2} = 25$, o $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$, todėl $h = 3 \cdot 4 = 12$. Vadinasi, $EF^2 = 4(25^2 - 12^2)$, $EF = 2\sqrt{37 \cdot 13}$.
Teisingas atsakymas **C**.

S28. Ⓑ 3002

! Duotasis reiškinys lygus

$$\frac{(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot\ldots\cdot(2001^2-1)}{2^2\cdot3^2\cdot\ldots\cdot2001^2} =$$
$$= \frac{(1\cdot3)\cdot(2\cdot4)\cdot(3\cdot5)\cdot\ldots\cdot(1998\cdot2000)\cdot(1999\cdot2001)\cdot(2000\cdot2002)}{2^2\cdot3^2\cdot\ldots\cdot2001^2} =$$
$$= \frac{2\cdot2001\cdot2002}{2^2\cdot2001^2} = \frac{1001}{2001}.$$

Gautoji trupmena nesuprastinama,— jeigu skaitiklis ir vardiklis dalytųsi iš $d \neq 1$, tai ir jų skirtumas 1000 dalytųsi iš d, todėl d dalytųsi iš 2 arba 5. Bet 1001 nei iš 2, nei iš 5 nesidalija.
Kadangi $1001 + 2001 = 3002$, tai teisingas atsakymas **B**.

S29. Ⓒ 10

! Sakykime, kad dėdės Beno pagautų žuvų masė buvo M. Kiekviena žuvis, kurią suėdė šuo, vidutiniškai svėrė $\frac{0,35}{3}M$. Katė suėdė $\frac{5}{13} \cdot 0,65M = 0,25M$. Kiekviena iš katės suėstų žuvų vidutiniškai svėrė $\frac{0,25M}{3}$. Vakarienei liko $M - 0,35M - 0,25M = 0,4M$ žuvies. Jeigu vakarienei buvo suvalgyta n žuvų, tai kiekviena jų vidutiniškai svėrė $\frac{0,4M}{n}$, ir

$$\frac{0,25M}{3} < \frac{0,4M}{n} < \frac{0,35M}{3}.$$

Padauginę iš $3 \cdot 20/M$, gauname $5n < 24 < 7n$, t. y. $n < 5, n > 3$. Vadinasi, vakarienei buvo suvalgytos 4 žuvys, o dėdė Benas sugavo $3 + 3 + 4 = 10$ žuvų.
Teisingas atsakymas **C**.

S30. Ⓒ $\frac{10}{3}$

! Nesunku įsitikinti, kad trijų trikampių, imant juos kas antrą, plotų sandauga lygi kitų trijų trikampių plotų sandaugai:

$$S_{\triangle ATB} \times S_{\triangle CTD} \times S_{\triangle ETF} =$$
$$= \frac{1}{2}AT \cdot BT \sin\angle ATB \times \frac{1}{2}CT \cdot DT \sin\angle CTD \times \frac{1}{2}ET \cdot FT \sin\angle ETF =$$
$$= \frac{1}{2}CT \cdot BT \sin\angle CTB \times \frac{1}{2}ET \cdot DT \sin ETD \times \frac{1}{2}AT \cdot FT \sin ATF =$$
$$= S_{\triangle BTC} \cdot S_{\triangle DTE} \cdot S_{\triangle FTA}.$$

Vadinasi, $S_{\triangle FTA} \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 4 \cdot 5$, ir $S_{\triangle FTA} = 10/3$.
Teisingas atsakymas **C**.

Kengūra 2001 Atsakymai
Кенгуру 2001 Ответы
Kangur 2001 Odpowiedzi

Užduoties Nr. Nr. zadania	Grupė/Grupa M	B	K	J	S
1	C	B	B	C	B
2	D	C	E	C	A
3	D	B	C	B	E
4	C	D	B	D	E
5	C	E	B	B	B
6	E	C	B	A	D
7	E	E	B	C	A
8	E	D	A	C	B
9	C	C	A	B	D
10	D	A	D	C	B
11	E	D	D	D	C
12	C	A	E	C	A
13	E	C	C	C	E
14	B	C	D	B	A
15	C	B	C	A	E
16	A	D	E	E	A
17	D	C	B	B	D
18	C	D	A	D	E
19	C	E	D	E	E
20	A	B	B	E	C
21	A	C	E	D	D
22	C	B	D	B	C
23	B	C	C	D	E
24	E	C	C	B	B
25		E	E	C	D
26		D	D	E	C
27		A	C	C	C
28		C	B	D	B
29		A	D	E	C
30		D	C	B	C
№задания	Группа М	Б	К	Ю	С